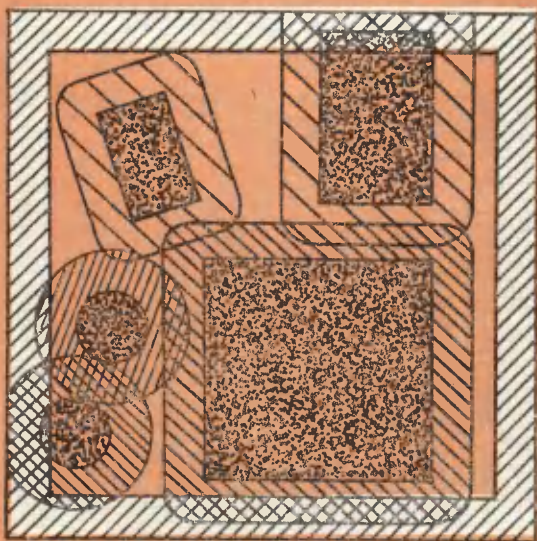


Математика

Библиотечна  
физико-математической школы

# Математи- ческие соревнования

## ГЕОМЕТРИЯ



Математика

Библиотечка  
физико-математической школы  
Выпуск 4\*

# Математические соревнования

## Геометрия

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы  
Москва 1974

512  
М 89  
УДК 512.2 512.3

Николай Борисович Васильев,  
Станислав Алексеевич Молчанов,  
Александр Львович Розенталь,  
Анатолий Павлович Савин

Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

Серия дополнительная

Редактор серии  
И. М. Гельфанд

© Издательство «Наука», 1974.

М- $\frac{20202-085}{053(02)-74}$  34-74

## Содержание

Предисловие . . . . .	4
Задачи . . . . .	5
Решения . . . . .	22
Дополнительные задачи . . . . .	74

### Расположение задач по циклам

	Задачи.	Решения
1. Расположения точек, прямых, отрезков . .	5	22
2. Параллельность и перпендикулярность, многоугольники . . . . .	7	27
3. Преобразования . . . . .	9	32
4. Построения . . . . .	10	36
5. Соотношения между углами . . . . .	12	42
6. Окружности и многоугольники . . . . .	12	46
7. Разбиения и покрытия . . . . .	15	52
8. Задачи на клетчатой бумаге . . . . .	17	58
9. Плотность и вместимость . . . . .	18	61
10. Геометрические неравенства . . . . .	20	65
11. Максимумы и минимумы . . . . .	21	70

## Предисловие

Эта книга содержит полтора ста задач по геометрии на плоскости. В основном, это задачи довольно трудные, хотя для их решения, как правило, достаточно знаний 8—9 классов, а во многих случаях и 7 класса. Книга разбита на три части. Первые сто задач составляют содержание первой части, а их решения приведены во второй части книги. Для удобства читателей эти задачи разбиты на 11 разделов, а каждая задача снабжена двойным номером и названием: например, задача «Шмель и соты» является девятой в восьмом разделе «Задачи на клетчатой бумаге» и имеет номер 8.9.

Тематика многих задач, особенно в последних пяти разделах, нетрадиционна: здесь затрагиваются вопросы, близкие к «современным» разделам геометрии (комбинаторная геометрия, топология, задачи на максимум и минимум, оценки и неравенства, задачи на выпуклые фигуры).

Некоторые из этих задач трудно сформулировать точно, не выходя за рамки школьной математики, — их можно рассматривать как вопросы для размышления.

Основу книги составили задачи математических олимпиад и конкурсов Вечерней математической школы при МГУ. Некоторые задачи и решения публикуются впервые.

Читателям, которые захотят обратиться к более полным и систематическим изданиям по геометрии, мы рекомендуем книги серии «Библиотека математического кружка», а также книгу Г. С. М. Кокстера «Введение в геометрию».

Авторы приносят глубокую благодарность В. Л. Гутенмахеру за ценные замечания по содержанию и структуре книги.

## ЗАДАЧИ

ТОЧКИ, ГДЕ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ПРЯМЫЕ

**1.1.** Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими? Тот же вопрос для 7 отрезков. (На рисунке показано, что 6 отрезков так расположить можно.)

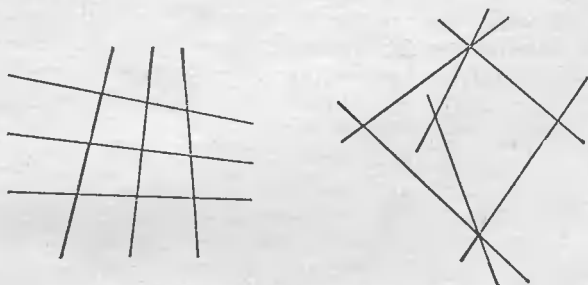


Рис. 1.1.

**1.2.** На рисунке *а* 7 прямых пересекаются в 7 точках, на рисунке *б* — в 9 точках. Могут ли 7 прямых пересекаться в 8 точках? Сколько вообще может быть точек пересечения у 7 прямых? (Перечислите все возможные значения.)

**1.3.** Поставьте вместо многоточия такое натуральное число  $p$ , чтобы ответ на следующий вопрос был однозначным: сколько прямых проведено на плос-

кости, если известно, что они пересекаются в ... различных точках?

1.4. Докажите, что 7 прямых и 7 точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую

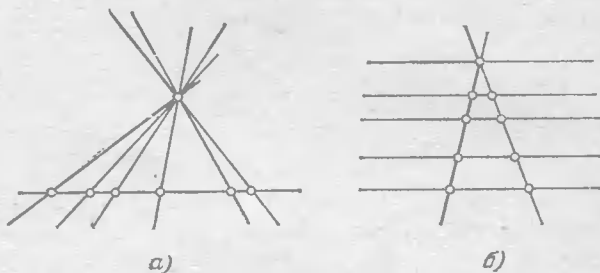


Рис. 1.2.

точку проходили ровно 3 прямые и на каждой прямой лежали ровно 3 точки.

ШТРИХОВКИ

1.5. На рисунке показано, как можно «заштриховать» отрезками полукруг; это означает, что полукруг можно полностью покрыть отрезками, не имеющими общих точек (даже концов). Придумайте, как можно

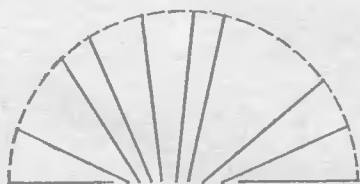


Рис. 1.5.

заштриховать равными отрезками любой треугольник, заштриховать не обязательно равными отрезками круг \*). (Одна точка отрезком не считается!)

\*) В замечательной книжке с картинками «Математический калейдоскоп» Г. Штейнгауза (Гостехиздат, 1949, стр. 10), где приводится задача о треугольнике, имеется неточность — там написано: «Круг так заштриховать невозможно, даже если бы отрезок менял длину».

#### СВОБОДНЫЕ ВЕРШИНЫ

1.6. В выпуклом многоугольнике проведены некоторые диагонали. Никакие две из них не пересекаются. Докажите, что по каждую сторону от любой из них есть «свободные вершины», т. е. вершины, из которых не проведено ни одной диагонали.

#### КРАТЧАЙШАЯ ЛОМАНАЯ

1.7. На плоскости даны  $n$  точек. Докажите, что кратчайшая ломаная с вершинами в этих точках не имеет самопересечений.

#### КАРТА, ДЛЯ РАСКРАСКИ КОТОРОЙ МАЛО ТРЕХ КРАСОК

1.8. Расположите на плоскости одиннадцать одинаковых квадратов так, чтобы они не налегали друг на друга и чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни окрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

#### ВОЛЕЙБОЛЬНАЯ СЕТКА И НОЖНИЦЫ

1.9. Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки с квадратными ячейками, можно разрезать так, чтобы сетка не распалась на отдельные куски? Размеры сетки —  $10 \times 100$  ячеек.

#### ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

2.1. Через точку  $M$ , взятую на продолжении диагонали трапеции, и середину каждого основания проведены две прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках  $H$  и  $K$ . Докажите, что отрезок  $HK$  параллелен основаниям трапеции.

2.2. Середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $ED$  выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  соединены отрезками. Середины  $H$  и  $K$  полученных отрезков снова соединены. Докажите, что отрезок  $HK$  параллелен отрезку  $AE$  и равен  $\frac{1}{4}AE$ .

#### БИССЕКТРИСЫ ТРАПЕЦИИ

2.3. В трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) биссектрисы внутренних углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $M$ , а биссектрисы углов  $C$  и  $D$  — в точке  $N$ . Докажите, что длина отрезка  $MN$  равна половине разности между суммой оснований и суммой боковых сторон трапеции.



# ШЕСТИУГОЛЬНИКИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

2.4. В выпуклом шестиугольнике  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  противоположные стороны параллельны. Докажите, что площади треугольников  $A_1A_3A_5$  и  $A_2A_4A_6$  равны.

2.5. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что разности противоположных сторон такого шестиугольника равны между собой.

## КВАДРАТ НА ГИПОТЕНУЗЕ

2.6. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе,

а) делит прямой угол пополам,

б) равен сумме катетов, помноженной на  $\sqrt{2}/2$ .

## ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА

2.7. Из точек  $K, E, H$ , лежащих соответственно на сторонах  $AB, BC, CA$  данного треугольника  $ABC$ , восстановлены к этим сторонам перпендикуляры. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$AK^2 + BE^2 + CH^2 = KB^2 + EC^2 + HA^2.$$

## ПОЛИЦЕЙСКИЕ И ВОР

2.8. Между двумя параллельными дорогами, находящимися на расстоянии 30 м друг от друга, стоит

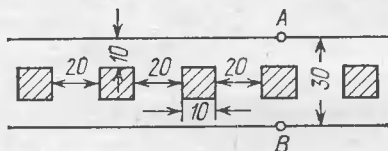


Рис. 2.8.

бесконечный ряд одинаковых домиков размерами  $10\text{ м} \times 10\text{ м}$  на расстоянии 20 м один от другого и 10 м от каждой из дорог (см. рисунок). По одной из дорог со скоростью  $v$  м/сек движется бесконечная цепь полицейских, соблюдающих интервалы 90 м. В тот момент, когда один из полицейских находится напротив одного из домиков (в точке A), по другую сторону этого домика (в точке B) появляется вор.

2  
С какой постоянной скоростью и в каком направлении должен красться вор, чтобы скрываться от полицейских за домами?

ОДИН ТУПОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

2.9. Докажите, что в треугольнике со сторонами  $a, b, c$  прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, тогда и только тогда перпендикулярна медиане стороны  $c$ , когда  $a^2 + b^2 = 2c^2$ .

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК В ПАРАЛЛЕЛОГРАММЕ

2.10. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Докажите, что если площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма, то одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

ОТРАЖЕННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

3.1. В плоскости выпуклого четырехугольника  $ABCD$  лежит точка  $M$ . Рассмотрим выпуклый четырехугольник с вершинами в точках, симметричных точке  $M$  относительно середин сторон данного четырехугольника. Докажите, что его площадь вдвое больше площади  $ABCD$ .

СНОВА РАВНОСТОРОННИЙ

3.2. На двух смежных сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вне его построены равносторонние треугольники  $ABE$  и  $BCF$ . Докажите, что треугольник  $DEF$  — равносторонний.

СЕМЕЙСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

3.3. Рассмотрим множество равнобедренных треугольников, основания которых лежат на данной прямой, одна из вершин — в данной точке  $A$  этой прямой, и радиусы вписанных окружностей которых равны данной величине  $r$ . Докажите, что все боковые стороны этих треугольников, не проходящие через вершину  $A$ , касаются одной окружности.

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА

3.4. а) Прямоугольная карта города целиком покрыта второй картой того же города, масштаб

которой в 5 раз крупнее, причем так, что их соответствующие стороны параллельны. Докажите, что можно, не сдвигая карты с места, одновременно проколоть их иглой так, что точка прокола укажет на обеих картах один и тот же пункт города.

б) Докажите, что это утверждение останется верным, даже если не требовать, чтобы соответствующие стороны карт были параллельны.

МУРАВЕЙ И ЧЕРЕПАХИ — ДВИЖЕНИЕ ПО СПИРАЛИ

3.5. Из точки  $O$  проведено 12 лучей  $l_1, l_2, \dots, l_{12}$  так, что каждые два соседних луча образуют угол в  $30^\circ$ . Муравей, сидевший на луче  $l_1$ , в некоторый момент пополз по перпендикуляру к лучу  $l_2$ . Достигнув  $l_2$ , он повернул и пополз по перпендикуляру к лучу  $l_3$ , и так далее. Первый оборот вокруг точки  $O$  он проделал за 1 минуту. Сколько времени он затратит на второй оборот, если все время будет ползти с постоянной скоростью? Какое расстояние он проползет до точки  $O$ , если первый виток равен  $a$  м?

3.6. В четырех вершинах квадрата  $ABCD$  со стороны  $a$  сидят четыре черепахи  $a, b, c, d$ . В определенный момент времени они одновременно начинают двигаться с одной и той же постоянной скоростью  $v$ , причем  $a$  ползет все время прямо по направлению к  $b$ ,  $b$  — к  $c$ ,  $c$  — к  $d$ ,  $d$  — к  $a$ . Где и через сколько времени они встретятся?

СТЕРТЫЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

4.1. На доске был нарисован параллелограмм  $ABCD$  и в нем отмечены точка  $E$  — середина стороны  $BC$  и точка  $F$  — середина стороны  $CD$ . Дежурный стер параллелограмм, остались только точки  $A, E$  и  $F$ . Как по этим данным восстановить чертёж?

СЕРЕДИНЫ ТРЕХ РАВНЫХ СТОРОН

4.2. На плоскости даны три точки. Постройте четырехугольник, для которого эти точки были бы серединами трех последовательных равных сторон.

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

4.3. На окружности даны три точки. Найдите на окружности четвертую точку такую, чтобы в четырехугольник с вершинами в этих точках можно было вписать окружность.

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

**4.4.** Даны окружность, точка  $A$ , лежащая на окружности, и точка  $M$ , лежащая внутри окружности. Найдите на окружности такие точки  $B$  и  $C$ , чтобы точка  $M$  была для треугольника  $ABC$

а) точкой пересечения медиан,

б) точкой пересечения высот.

**4.5.** Дана прямая и две точки, лежащие по разные стороны от нее. Постройте треугольник, для которого данные точки были бы основаниями двух высот, а третья высота лежала бы на данной прямой.

**4.6.** Постройте треугольник, если заданы прямая, на которой лежит его основание, и две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

**4.7.** Постройте треугольник, если известны середины двух его сторон и прямая, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

**4.8.** Даны прямая и две точки по одну сторону от нее. Постройте треугольник, основание которого лежит на данной прямой, точка пересечения медиан лежит в одной из данных точек, а точка пересечения высот — в другой.

## ЭКОНОМНОЕ ПОСТРОЕНИЕ

**4.9.** Дан отрезок. а) Разделите его на 4 равные части, проведя не более 6 линий — прямых и окружностей. б) Разделите его на 6 равных частей, проведя не более 8 линий.

## МЕЛКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ

**4.10.** С помощью циркуля раствором не более 10 см и линейки длиной 10 см соедините отрезком данные точки  $A$  и  $B$ , удаленные друг от друга более чем на 1 м.

## ПОСТРОЕНИЯ ПЯТАКОМ

**4.11.** На плоскости даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые можно накрыть одним пятаком. Постройте с помощью пятака четвертую вершину  $D$  параллелограмма  $ABCD$ . (Разрешается прикладывать пятак к двум имеющимся точкам и обводить его карандашом.)

4.12. С помощью трех пятаков найдите центр окружности, диаметр которой равен диаметру пятака. (Помимо построений, описанных в предыдущей задаче, разрешается прикладывать один пятак к двум другим.)

найдите угол

5.1. Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $OC = AB$ . Найдите угол при вершине  $C$ .

5.2. Окружность, построенная на катете прямо-угольного треугольника, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении  $1:3$ . Определите углы треугольника.

5.3. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если расстояние от вершины  $C$  до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

5.4. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если вершина  $A$  находится на одинаковом расстоянии от центров вневписанных \*) окружностей, касающихся сторон  $AB$  и  $BC$ .

5.5. В треугольнике  $ABC$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $A$  проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Найдите угол  $C_1A_1B_1$ .

5.6. Определите углы треугольника, если центры вписанной и описанной около него окружностей симметричны относительно одной из его сторон.

5.7. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с боковыми сторонами  $AB = BC$  угол  $ABC$  равен  $80^\circ$ . Внутри треугольника взята точка  $O$  так, что угол  $OAC$  равен  $10^\circ$ , а угол  $OCA$  равен  $30^\circ$ . Найдите угол  $AOB$ .

5.8. Докажите, что если разность между суммой двух сторон треугольника и его третьей стороной равна диаметру вписанного круга, то один из углов треугольника — прямой.

диагональ вписанного четырехугольника

6.1. Докажите, что если в выпуклый четырехугольник  $ABCD$  можно вписать окружность, то окружности, вписанные в два треугольника  $ABC$  и  $ADC$ , касаются между собой.

---

\*) Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других, называется *вневписанной*.

## ВОКРУГ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

6.2. а) Точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность  $O$ . Произвольная точка  $M$ , лежащая на окружности  $O$ , соединяется отрезками с точками  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$ . Докажите, что один из этих отрезков равен сумме двух других.

б) Точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность  $O$ . Проводится окружность, касающаяся данной окружности  $O$ , и к этой второй окружности из каждой точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  проводится касательная. Докажите, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух других.

в) Три равные окружности, центры которых  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  образуют правильный треугольник, касаются четвертой окружности  $O$ . Из произвольной точки  $N$  окружности  $O$  проведено по касательной к каждой из трех равных окружностей. Докажите, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух других касательных.

(В задачах б) и в) в случае внутреннего касания окружностей предполагается, что окружность  $O$  имеет больший радиус — иначе нельзя провести касательных, о которых говорится в условии.)

## ЦЕПОЧКА ПЯТАКОВ

6.3. Шесть пятаків лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (т. е. первый пятак касается второго, второй — третьего и т. д., шестой — первого). Седьмой пятак, также лежащий на столе, катится без скольжения по внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из шести пятаків цепочки. Сколько оборотов сделает этот пятак, вернувшись в исходное положение?

## ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК И ЧЕТЫРЕ КРУГА

6.4. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  и четыре круга, каждый из которых касается одной стороны четырехугольника и продолжений двух соседних с ней сторон. Докажите, что центры этих кругов лежат на одной окружности.

И последняя — тоже

6.5. а) В десятиугольнике  $A_1A_2 \dots A_{10}$ , вписанном в окружность, стороны  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_5$  параллельны противоположным им сторонам. Докажите, что и сторона  $A_5A_6$  параллельна противоположной.

б) В десятиугольнике  $A_1A_2 \dots A_{10}$ , описанном около окружности с центром  $O$ , диагонали  $A_1A_6$ ,  $A_2A_7$ ,  $A_3A_8$  и  $A_4A_9$  проходят через точку  $O$ . Докажите, что и диагональ  $A_5A_{10}$  проходит через точку  $O$ .

ДИАГОНАЛЬ — ДИАМЕТР

6.6. Докажите, что если у вписанного четырехугольника одна из диагоналей является диаметром описанной окружности, то проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

ТРИ РАВНЫЕ ХОРДЫ

6.7. В окружности проведены три равные хорды  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . Докажите, что диаметр  $BE$  пересекает прямую  $AD$  в такой точке  $F$ , что отрезки  $AB$  и  $AF$  равны, а прямая  $CE$  делит отрезок  $FD$  пополам.

ТРЕУГОЛЬНИК И ТРИ КРУГА

6.8. Пусть точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  лежат соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $APR$ ,  $BQR$  и  $CRQ$  пересекаются в одной точке.

ОКРУЖНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

6.9. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  больше диагонали  $BD$ . Через точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  проведена окружность, пересекающая диагональ  $AC$  в точке  $M$ . Докажите, что  $BD$  — общая касательная к окружностям, описанным около треугольников  $AMB$  и  $AMD$ .

ОСНОВАНИЯ ВЫСОТ

6.10. Точки  $K$  и  $P$  симметричны основанию  $H$  высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  относительно его сторон

$AB$  и  $BC$ . Докажите, что точки пересечения отрезка  $KP$  со сторонами  $AB$  и  $BC$  (или их продолжениями) —

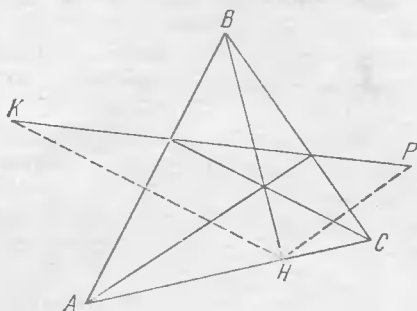


Рис. 6.10.

основания высот треугольника  $ABC$  (см. рисунок).

#### РАЗБИЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

7.1. Разбейте правильный  $n$ -угольник ( $n \geq 5$ ) на наименьшее число.

а) остроугольных треугольников,

б) тупоугольных треугольников.

Каждая сторона любого треугольника разбиения должна быть одновременно стороной другого треугольника разбиения или стороной многоугольника.

Здесь важно, что никакая вершина одного треугольника не делит на части сторону другого треугольника. Такое разбиение называется обычно *триангуляцией*.

#### РАЗРЕЗАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

7.2. Дан прямоугольник. Докажите, что при каждом  $n \geq 5$  его можно разрезать на  $n$  прямоугольников так, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали вместе прямоугольника.

#### ПАРКЕТЫ ИЗ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

7.3. а) Дан произвольный четырехугольник.

Докажите, что плоскость можно покрыть без пропусков и наложений четырехугольниками, равными данному.



б) Существует ли такой пятиугольник, копиями которого можно замостить плоскость?

в) Тот же вопрос для пятиугольника, никакие две стороны которого не параллельны.

7.4. Докажите, что плоскость нельзя покрыть равными выпуклыми семиугольниками.

7.5. а) Докажите, что плоскость удастся покрыть выпуклыми  $n$ -угольниками ( $n \geq 7$ ), если не требовать, чтобы они были равны между собой.

б) Докажите, что плоскость можно покрыть равными  $n$ -угольниками ( $n \geq 7$ ), если не требовать, чтобы они были выпуклыми.

#### ПОКРЫТИЯ

7.6. Окружность покрываема несколькими дугами. Эти дуги могут налегать друг на друга, но ни одна из них не покрывает окружность целиком. Докажите, что можно выбрать несколько из этих дуг так, чтобы они тоже покрывали всю окружность и в сумме составляли не больше  $720^\circ$ .

7.7. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками, ширина которых равна ширине коридора. Докажите, что можно снять несколько дорожек так, чтобы оставшиеся не налегали друг на друга и покрывали не менее половины коридора. (Предполагается, что любую дорожку можно изъять, не изменив положения остальных.)

7.8. Пол в прямоугольной комнате  $6 \times 3 \text{ м}^2$  полностью покрыт квадратными коврами разных размеров (края ковров параллельны стенам). Докажите, что можно убрать часть ковров так, чтобы оставшиеся ковры не перекрывались и покрывали более  $2 \text{ м}^2$ .

#### УЛИТКА И НАБЛЮДАТЕЛИ

7.9. Улитка ползла с непостоянной скоростью. В течение 6 минут несколько человек наблюдало за ней так, что ни в какой момент она не была без наблюдения. Каждый наблюдал ровно одну минуту и обнаружил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 м. Докажите, что за все 6 минут улитка могла проползти самое большее 10 м.

## ПАРКЕТЫ ИЗ СКОБОК

8.1. Вымостите плоскость одинаковыми «скобками»

а) из 6 квадратов (рисунок а),

б) из 5 квадратов (рисунок б).



а)



б)

Рис. 8.1.



Рис. 8.2.

8.2. Докажите, что плоскость нельзя вымостить одинаковыми скобками из 7 квадратов (см. рисунок).

## ПАРКЕТ ИЗ ПЛИТОК

8.3. а) Дно прямоугольной коробки выложено плитками размера  $2 \times 2$  и  $1 \times 4$ . Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку  $2 \times 2$ . Вместо нее удалось достать плитку  $1 \times 4$ . Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

б) Дно прямоугольной коробки выложено плитками двух сортов: прямоугольниками  $1 \times 3$  и «уголками» из трех плиток  $1 \times 1$ . Плитки высыпали из коробки, заменили один из «уголков» плиткой  $1 \times 3$  и вновь выложили дно коробки. Могло ли это быть?

ни одного уголка

8.4. Какое наибольшее число клеток в квадрате  $n \times n$ , нарисованном на клетчатой бумаге, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате  $2 \times 2$  не оказалось трех закрасенных клеток?

## ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ГОРОД

8.5. В городе 10 улиц параллельные друг другу и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки?

## ОКРУЖНОСТЬ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

8.6. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, проведена окружность радиуса 10. Докажите, что внутри этой окружности лежит не менее 250 узлов сетки. (Узлами называются точки, где пересекаются линии сетки.)

8.7. Какое наибольшее число клеток может пересекать окружность радиуса 10, начерченная на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1)?

## РАВНОСТОРОННИЙ МНОГОУГОЛЬНИК

8.8. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная линия, все звенья которой имеют одинаковую длину, а все вершины лежат в узлах сетки. Докажите, что число звеньев такой ломаной обязательно чётно.

## ШМЕЛЬ И СОТЫ

8.9. На плоскости нарисована сеть правильных шестиугольников со стороной 1 — «соты» (см. рисунок; заметьте, что в этой сети имеются отрезки трех направлений). Двигаясь по линиям сети, шмель прополз из узла  $A$  в узел  $B$  по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что он прополз 50 отрезков одного направления и 50 отрезков двух других направлений.

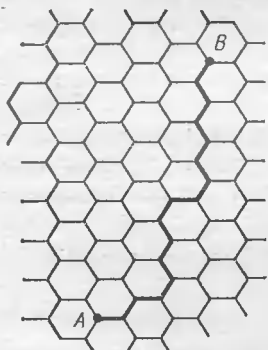


Рис. 8.9.

ТОЧКАМ ТЕСНО

9.1. В квадрат со стороной 1 бросили 51 точку. Докажите, что какие-нибудь три из них можно накрыть кругом радиуса  $\frac{1}{7}$ .

9.2. На плоскости расположены  $n$  точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

9.3. а) Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, все попарные расстояния между которыми больше 1.

б) Докажите, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 450 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

в) Докажите, что 400 точек расположить так в этом круге можно.

#### ОКРЕСТНОСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

9.4. Дан выпуклый многоугольник  $M$  площади  $S$  и периметра  $P$ . Рассмотрим множество  $\Phi(x)$  точек, удаленных от  $M$  не более чем на  $x$  (говорят, что точка  $A$  удалена от многоугольника  $M$  не более чем на  $r$ , если найдется такая точка  $B$  многоугольника  $M$ , что  $|AB| \leq r$ ). Найдите площадь фигуры  $\Phi(x)$  для каждого положительного числа  $r$ .

#### НА ЗАВОДСКОМ ДВОРЕ

9.5. На заводском дворе, представляющем собой квадрат  $70 \times 70$  м<sup>2</sup>, имеется три прямоугольных строения размерами  $20 \times 10$ ,  $25 \times 15$  и  $30 \times 30$  м<sup>2</sup>, а также два круглых бака диаметром 10 м. Докажите, что на этом дворе можно еще разбить клумбу диаметром 10 м.

#### КАК ВЫЙТИ ИЗ ЛЕСА

9.6. Десантник находится где-то в лесу площади  $S$ . Форма леса ему неизвестна, однако он знает, что в лесу нет полян. Докажите, что он может выйти из леса, пройдя путь не более  $2\sqrt{\pi S}$  (считается, что десантник может двигаться по пути заранее намеченной формы).

9.7. Докажите, что если в условиях предыдущей задачи лес выпуклый, то существует путь, гарантирующий выход из леса, длины не более  $\sqrt{2\pi S}$ .

9.8. Пусть лес имеет форму длинной полосы ширины  $l$ . Двигаясь по окружности радиуса  $l/2$ , десантник заведомо выйдет из леса, пройдя путь не более  $\pi l$ .

Придумайте стратегию, обеспечивающую выход из леса, при которой длина пути меньше  $2,5 l$ .

#### НЕРОВНЫЙ ЛЕС

9.9. В лесу все деревья выше 10 и ниже 50 метров, и расстояние между любыми двумя деревьями не больше разности их высот. Докажите, что этот лес можно окружить забором длины 80 м.

## ВЫПУКЛЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

10.1. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник. Докажите, что если периметр треугольника  $ABD$  меньше периметра  $ACD$ , то  $AB < AC$ .

10.2. Диагональ  $AC$  делит площадь выпуклого четырехугольника  $ABCD$  на две равные части. Докажите, что если  $AB > AD$ , то  $BC < DC$ .

ТУПОЙ ЛИ УГОЛ?

10.3. На продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  отложен отрезок  $CD = CB$ . Докажите, что если  $AC > BC$ , то угол  $ABD$  — тупой.

10.4. а) Высоты треугольника равны 3, 4 и 5. Какой это треугольник — прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

б) Тот же вопрос, если медианы треугольника равны 3, 4 и 5.

ОЧЕНЬ ОСТРЫЙ УГОЛ

10.5. Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся такие две диагонали, что меньший угол между прямыми, на которых они лежат, не превосходит  $5^\circ$  (угол между параллельными прямыми считается равным  $0^\circ$ ).

ОЦЕНКА ПЕРИМЕТРА

10.6. Середины соседних сторон выпуклого многоугольника соединены отрезками. Докажите, что периметр многоугольника, образованного этими отрезками, не меньше половины периметра исходного многоугольника.

КВАДРАТ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

10.7. Докажите, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

КУСОК ШЕСТИУГОЛЬНИКА

10.8. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площади не большей, чем одна шестая площади шестиугольника.

#### КУСОК ТОРТА

**10.9.** Торт имеет форму правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середины каждой стороны внутрь торта (в произвольном направлении) проводится разрез длины не менее 1. Докажите, что при этом от торта будет отрезан хотя бы один кусок.

#### ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК С ДАННЫМ УГЛОМ

**11.1.** На плоскости нарисован угол с вершиной  $A$  и внутри него задана точка  $M$ . Укажите на сторонах угла точки  $B$  и  $C$  такие, что отрезки  $AB$  и  $AC$  равны и сумма  $MB + MC$  принимает наименьшее значение.

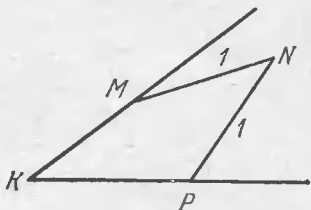


Рис. 11.2.

**11.2.** Дан угол  $K$ . Двумя отрезками  $MN$  и  $NP$  длины 1 отрезьте от него четырехугольник  $KMNP$  наибольшей площади (см. рисунок).

#### РОМБ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

**11.3.** Как из прямоугольника вырезать ромб наибольшей площади?

#### ТОЧКА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

**11.4.** Дан треугольник  $ABC$ . Где в его плоскости надо выбрать точку  $M$ , чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $BCM$ , была наименьшей?

**11.5.** Найдите в разностороннем треугольнике  $ABC$  точку, сумма расстояний от которой до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  наименьшая.

#### ТОЧКА НА ОКРУЖНОСТИ

**11.6.** Внутри окружности с центром  $O$  дана точка  $A$ , отличная от центра  $O$ . Найдите на окружности точку  $M$ , для которой угол  $AMO$  максимален.

**11.7.** Даны две concentric окружности с центром  $O$ . Через точку  $A$ , лежащую внутри меньшей из них, проведите луч так, чтобы его отрезок, заключенный между окружностями, был

- а) наименьшим,
- б) наибольшим.

1.1. 8 отрезков так расположить можно (см. рисунок), а 7 — нельзя. Докажем это.

Предположим, что такое расположение 7 отрезков возможно. Занумеруем отрезки и составим такую табличку  $7 \times 7$ : в клетке  $(i, j)$  на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца поставим  $+$ , если  $i$ -й отрезок пересекается с  $j$ -м, и  $-$ , если не пересекается. Если  $i = j$ , то тоже ставим  $-$ . Подсчитаем двумя способами, сколько плюсов в таблице.

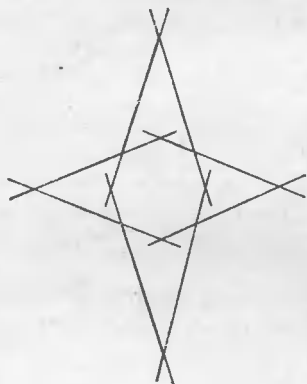


Рис. 1.1.

С одной стороны, в каждой строке их 3, поэтому всего  $— 3 \cdot 7 = 21$ . С другой стороны, таблица заполнена симметрично относительно диагонали: если в клетке  $(i, j)$  стоит  $+$ , то в клетке  $(j, i)$  — тоже. Зна-

чит, общее количество плюсов должно быть четным. Получили противоречие.

1.2. Точек пересечения может не быть, может быть одна или любое количество от 6 до 21-й. Приведем пример с 8 точками пересечения: 6 прямых, идущих по сторонам и диагоналям трапеции, и еще одна прямая, параллельная основаниям и проходящая

через точку пересечения диагоналей. Остальные примеры найдите сами.

### 1.3. Ответ. $p = 2$ .

Докажем, что если точек пересечения две, то прямых может быть только три. Пусть имеется всего две точки пересечения  $A$  и  $B$ , и пусть  $l_1$  и  $l_2$  — прямые, пересекающиеся в точке  $A$ , а  $l_3$  — прямая, не проходящая через  $A$  (такая есть, иначе все прямые пересекались бы в  $A$ ). Прямая  $l_3$  пересекает лишь одну из

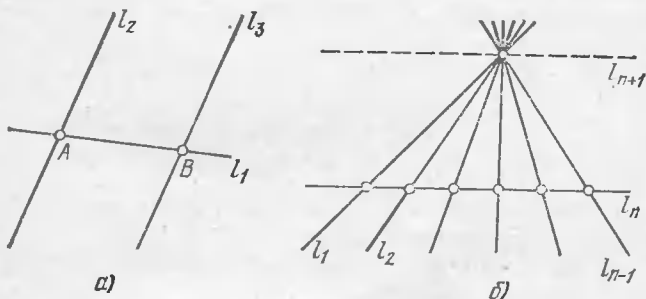


Рис. 1.3.

прямых  $l_1, l_2$ , скажем  $l_1$ , в точке  $B$ , другой прямой  $l_2$  она параллельна (рисунок  $a$ ). Проверьте, что больше нельзя провести ни одной прямой, не увеличивая числа точек пересечения.

Заметьте, что в доказательстве используется «пятый постулат» Евклида — аксиома, гласящая, что через точку нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.

Докажем, что на месте многоточия не может стоять число, отличное от 2. Если точка пересечения одна, то прямых может быть любое число, начиная с 2-х, надо лишь, чтобы все они проходили через эту точку. Если число точек пересечения  $n > 2$ , то число прямых не определено однозначно. Это показывает пример расположения прямых, изображенный на рисунке б: можно провести прямую  $l_{n+1}$  параллельно  $l_n$ , а можно не проводить, на число точек пересечения это не влияет.

1.4. Предположим, что такое расположение 7 точек и 7 прямых существует. Будем называть эти прямые и эти точки «отмеченными». Прежде всего



докажем, что прямая, проходящая через любые две отмеченные точки  $M$  и  $N$ , является отмеченной. На каждой из трех прямых, проходящих через  $M$ , есть еще по 2 отмеченные точки, и одной из этих шести точек должна быть  $N$ , так как отмеченных точек всего 7.

Так же доказывается, что любые две отмеченные прямые пересекаются в отмеченной точке.

Пусть теперь  $A, B, C$  — отмеченные точки, лежащие на отмеченной прямой  $l$  так, что  $B$  лежит между

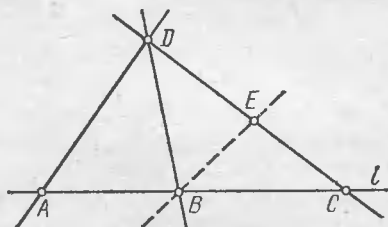


Рис. 1.4.

$A$  и  $C$ ,  $D$  — та из остальных отмеченных точек, которая ближе к  $l$  (см. рисунок). По доказанному прямые  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  — отмеченные. По условию через  $B$  проходит еще одна отмеченная прямая, отличная и от  $l$ , и от  $BD$ . Она пересечет отрезок  $AD$  или отрезок  $CD$  в отмеченной точке  $E^*$ ), которая ближе к прямой  $l$ , чем точка  $D$ . Противоречие.

1.5. Способ, изображенный на рисунке а), годится для тупоугольного и прямоугольного треугольника (длина штриха равна наименьшей стороне), способ б) — для любого (длина штриха равна наименьшей из высот). Аккуратное доказательство того, что через каждую точку проходит только один отрезок нужной длины, оставляем читателю.

Построим на диаметре круга три отрезка  $AB$ ,  $CD$  и  $KL$ , как показано на рисунке в. Пусть точка  $M$  рав-

---

\*) Здесь мы пользуемся таким утверждением: если прямая пересекает одну из сторон треугольника и не проходит через его вершины, то она должна пересечь одну из двух других сторон этого треугольника. Это очевидное утверждение (или какое-либо эквивалентное ему) при формальном аксиоматическом изложении геометрии приходится принимать за аксиому.

номерно движется по верхней полуокружности из  $A$  в  $L$  так, что в начальный момент  $t=0$  она находится в точке  $A$ , а в конечный момент  $t=1$  достигает  $L$ . Обозначим через  $M_t$  ее положение в момент  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Заставим другую точку двигаться равномерно по диаметру из  $B$  в  $C$  с такой скоростью, чтобы в момент  $t=0$  она находилась в  $B$ , а в момент  $t=1$  в  $C$ . Пусть  $N_t$  — ее положение в момент

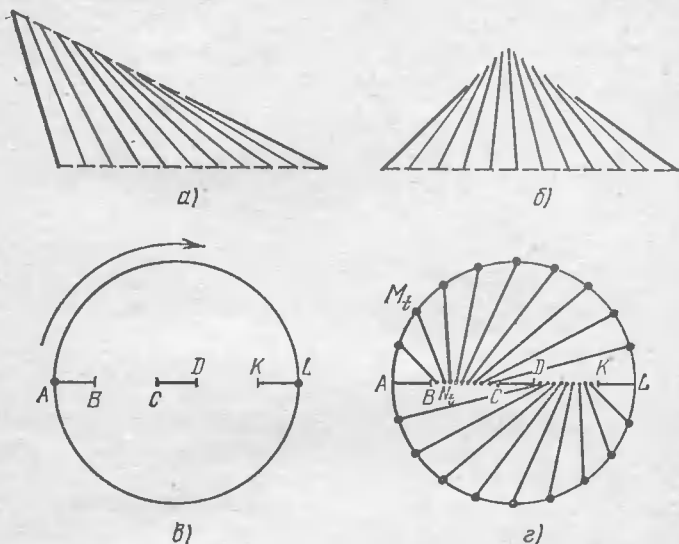


Рис. 1.5.

$t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Отрезки  $M_t N_t$  при  $0 < t < 1$  «замечают» верхний полукруг и интервал между точками  $B$  и  $C$  (это очевидно, хотя строго доказать трудно).

Аналогичные построения можно провести для нижнего полукруга и интервала между точками  $D$  и  $K$ . Полученные отрезки вместе с отрезками  $AB$ ,  $CD$  и  $KL$  образуют требуемое покрытие (рисунок г).

Заметим, что, в отличие от штриховки треугольника в предыдущей задаче, здесь некоторые концы штрихов лежат внутри круга. Заштриховать круг так, чтобы концы всех штрихов лежали на окружности, нельзя (видимо, именно такую штриховку подразумевал Г. Штейнгауз).

1.6. Пусть  $M$  — данный многоугольник,  $AB$  — одна из проведенных диагоналей. Она делит  $M$  на два выпуклых многоугольника  $M_1$  и  $M_2$ , расположенных по разные стороны от  $AB$ . Докажем, что и в  $M_1$  и в  $M_2$  есть свободные вершины, отличные от  $A$  и  $B$ . Рассмотрим, скажем,  $M_1$ . Если в  $M_1$  не проведены диагонали, то все его вершины, кроме  $A$  и  $B$ , свободны. Если же такие диагонали есть, то каждая из них отсекает от  $M_1$  многоугольник, не содержащий  $AB$ . Выберем среди этих многоугольников тот, у которого наименьшее число сторон. Все его

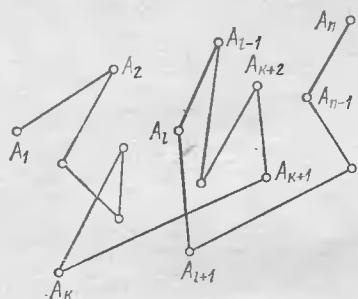


Рис. 1.7.

вершины, отличные от концов отсекающей его диагонали, очевидно, свободны.

1.7. Предположим, что кратчайшая ломаная  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  (см. рисунок) имеет два пересекающихся звена  $A_kA_{k+1}$  и  $A_lA_{l+1}$ , где  $k+1 < l$  (в частности, может случиться, что отрезок  $A_kA_{k+1}$  проходит через

точку  $A_l$  или отрезок  $A_lA_{l+1}$  — через точку  $A_k$ ). Докажите, что если отрезки  $A_kA_{k+1}$  и  $A_lA_{l+1}$  ломаной заменить отрезками  $A_kA_l$  и  $A_{k+1}A_{l+1}$ , то получится ломаная с вершинами в данных точках, имеющая меньшую длину, чем та, которую мы считали кратчайшей.

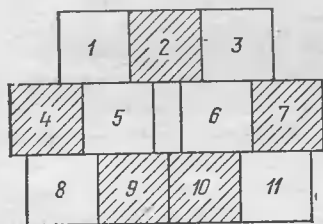


Рис. 1.8.

Замечание. Заменить звенья  $A_kA_{k+1}$  и  $A_lA_{l+1}$  на  $A_kA_l$  и  $A_{k+1}A_{l+1}$  нельзя; хотя при этом сумма длин звеньев также уменьшится, но ломаная распадается на две: замкнутую  $A_{k+1}A_{k+2} \dots A_lA_{k+1}$  и незамкнутую  $A_1 \dots A_kA_{l+1} \dots A_n$  (убедитесь в этом!)

1.8. Одно из возможных расположений показано на рисунке. Докажем методом «от противного», что оно удовлетворяет условию.

Допустим, что существует раскраска в три цвета, при которой квадраты с общей границей покрашены в разные цвета. Тогда любые два квадрата, имеющие двух общих соседей разного цвета, должны быть покрашены в один и тот же третий цвет. Поэтому квадраты 4 и 7 должны быть окрашены одинаково с квадратом 2, а, значит, и друг с другом; квадрат 9 окрашен так же, как квадрат 4, а квадрат 10 — как квадрат 7. Следовательно, квадраты 9 и 10 с общей границей окрашены одинаково. Противоречие.

1.9. Ответ. 1000.

Предположим, что разорвано столько веревочек, что сетка еще не распалась на куски, но больше уже нельзя разорвать ни одной веревочки. Это означает, что в сетке не осталось ни одного замкнутого кольца из веревочек. Докажите, что тогда число неразорванных веревочек на единицу меньше общего числа узлов (считая и узлы, расположенные на краю и в вершинах сетки).

В этом можно убедиться, например, так. Зафиксируем какой-то один узел  $A$ . Из него можно пройти по неразорванным веревочкам в любой другой узел  $B$ . Поставим в соответствие каждому узлу  $B$  сетки последнюю веревочку на пути, ведущем из  $A$  в  $B$ . Этот путь определяется однозначно, поскольку ни одного замкнутого пути из веревочек нет. Поэтому соответствие между оставшимися веревочками и узлами  $B$  (отличными от  $A$ ) взаимно однозначно. Таким образом, веревочек осталось на единицу меньше общего числа узлов сетки, равного, как нетрудно посчитать, 1111. Общее число веревочек новой неразорванной сетки равно 2110. Таким образом, чтобы осталось 1110 веревочек, нужно разорвать 1000 штук.

Пример, когда разорвано 1000 веревочек и сетка еще не распалась на куски, привести легко. Например, можно разорвать все горизонтальные веревочки во всех рядах, кроме самого верхнего. Тогда сетка превратится в «бахрому». По существу, мы доказали выше, что можно последовательно порвать любые 1000 веревочек, следя только за тем, чтобы каждый раз разрезалось какое-либо веревочное кольцо, и лишь на 1001-й раз этого сделать не удастся.

2.1. Пусть  $P$  и  $Q$  — середины оснований  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  (см. рисунок),  $M$  — точка на

продолжении диагонали  $AC$ ,  $R$  — точка пересечения прямых  $MP$  и  $AD$ . Так как треугольники  $AHR$  и  $BPH$  подобны и  $PC \parallel AR$ , то  $AH:HB = AR:BP = AR:PC = AM:CM$ . Так же доказывается, что  $DK:KC = AM:CM$ . Значит,  $AH:HB = DK:KC$ , откуда и следует доказываемое.

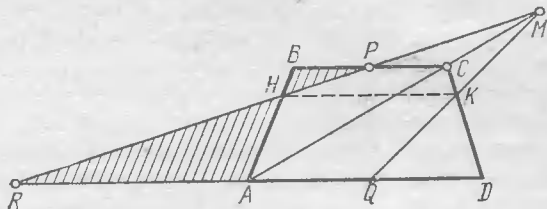


Рис. 2.1.

**2.2.** Докажите предварительно следующее утверждение. Отрезки, соединяющие середины последовательных сторон произвольного четырехугольника, образуют параллелограмм. Применив его к четырехугольнику  $BCDE$  (см. рисунок), покажите, что  $HK$  — средняя линия треугольника  $MPL$ , где  $L$  — середина отрезка  $BE$ . Таким образом, отрезки  $AE$ ,  $ML$  и  $HK$  параллельны и  $AE = 2ML = 4HK$ .

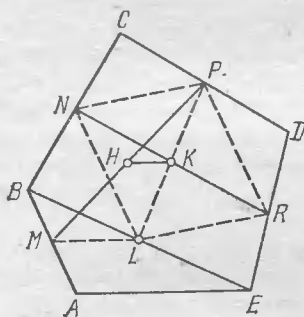


Рис. 2.2.

**2.3.** Докажите сначала, что треугольники  $ABM$  и  $CND$  — прямоугольные. Соединив затем точку  $M$  и  $N$  с серединами  $K$  и  $L$  соот-

ветствующих боковых сторон, покажите, что отрезки  $LN$  и  $KM$  параллельны основанию  $AD$  и, тем самым, точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  и  $L$  лежат на средней линии трапеции. Учтите, наконец, что  $KM = AB/2$  и  $LN = CD/2$ .

**2.4.** Площадь каждого из двух треугольников  $A_1A_3A_5$  и  $A_2A_4A_6$  (см. рисунок) равна  $(s_{\text{ш}} + s_{\text{т}})/2$ , где  $s_{\text{ш}}$  — площадь данного шестиугольника,  $s_{\text{т}}$  — площадь треугольника  $T$ , стороны которого равны разностям противоположных сторон шестиугольника и со-

ответственно параллельны этим сторонам. Для доказательства нужно разрезать данный шестиугольник на три параллелограмма и треугольник  $T$ , как

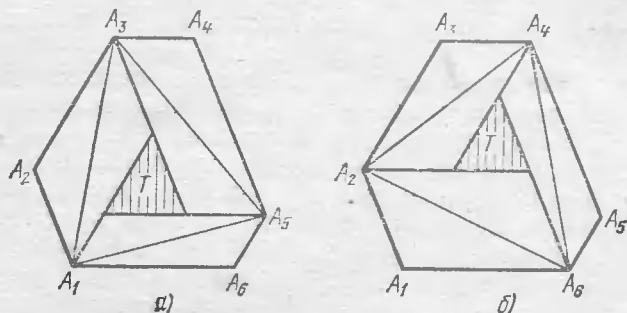


Рис. 2.4.

показано на рисунках а и б (треугольник  $T$  заштрихован).

2.5. Приведем идеи двух несложных решений.

1-е решение. Треугольник  $T$ , о котором шла речь в решении предыдущей задачи, в нашей задаче — равносторонний.

2-е решение. Если продлить три не соседние стороны шестиугольника до пересечения, то образуется равносторонний треугольник.

2.6. Решение нетрудно уяснить из рисунка.

2.7. Допустим, что перпендикуляры пересекаются в одной точке  $O$ . Тогда справедливость записанного в условии равенства легко доказать, если применить теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам  $АОК$ ,  $КОВ$ ,  $ВОЕ$ ,  $ЕОС$ ,  $СОН$  и  $НОА$ .

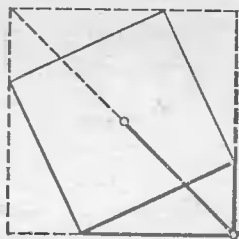


Рис. 2.6.

Теперь нужно доказать, что если записанное в условии равенство справедливо, то перпендикуляры, восстановленные к сторонам в точках  $K$ ,  $E$ ,  $H$ , пересекаются в одной точке. Пусть  $P$  — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к сторонам  $AC$  и  $BC$  в точках  $H$  и  $E$ . Опустим из точки  $P$  перпендикуляр  $PK_1$  на  $AB$ . Тогда, как было показано в первом

абзаце, для точек  $K_1, E, H$  справедливо то же самое равенство, что и для точек  $K, E, H$ , откуда следует, что  $AK^2 - KB^2 = AK_1^2 - K_1B^2$ . Докажите, что последнее равенство возможно только, если  $K$  и  $K_1$  совпадают.

2.8. Соединим мысленно вора с каждым из полицейских прямой и посмотрим, как изменяется положение каждой прямой при движении.

Докажите такую лемму: если две точки двигаются по двум параллельным прямым — одна со скоростью  $u$ , а другая со скоростью  $v \neq u$  (в одном и том же или в противоположном направлениях), то прямая, проходящая через эти две точки, все время проходит через одну фиксированную точку. Попробуйте применить этот факт для решения задачи.

Пусть полицейские едут со скоростью  $v$ . Если вор движется в обратном направлении со скоростью  $u = 2v$ , то прямая, соединяющая его с полицейским  $A_0$ , постоянно проходит через точку  $E_0$ , прямая, соединяющая его с  $A_1$ , проходит через  $E_1$  и вообще каждая прямая как бы вращается вокруг «двери» соответствующего домика (см. рисунок). Следовательно, полицейские не увидят вора.

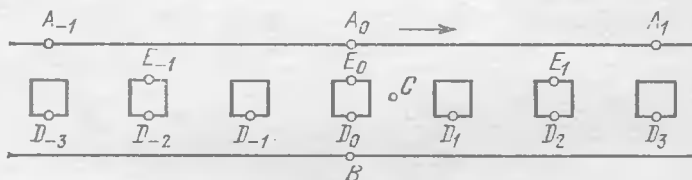


Рис. 2.8.

Проверьте, что по тем же причинам вор не будет замечен, если побежит со скоростью  $u = v/2$  (помогут другие «двери» домиков —  $D_{-1}, D_0, D_1, D_2$  и т. д.).

Докажем, что других ответов, кроме  $u = v/2$  и  $u = 2v$ , в задаче нет.

Ясно, что вор не может двигаться в ту же сторону, что и полицейские (он будет замечен полицейским  $A_0$  раньше, чем тот пройдет отрезок 30 м; при этом, например, полицейскому достаточно смотреть все время в направлении точки  $C$ ).

Пусть вор движется навстречу полицейским со скоростью  $u$ . Докажите, что точки  $F_n$  ( $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ), вокруг которых вращаются прямые, соединяющие вора с полицейскими  $A_n$ , расположены на одной прямой, параллельной дорогам, на расстоянии  $\frac{90u}{u+v}$  м друг от друга. Легко проверить, что отношение этой величины к расстоянию между центрами соседних домиков (30 м) будет целым числом только при  $u = v/2$  или  $u = 2v$ . А если это отношение  $d$  не целое, то можно указать такое натуральное  $n$ , для которого расстояние от числа  $dn$  до ближайшего к нему целого числа больше  $1/6$ . (Проверьте более сильное утверждение: если расстояние от числа  $d$  до ближайшего к нему целого числа равно  $r > 0$  и  $n$  — наименьшее целое число, большее или равное  $1/3 r$ , то расстояние от  $nd$  до ближайшего целого числа не меньше  $1/3$ .) Если через соответствующую точку  $F_{-n}$  провести перпендикулярную к дорогам прямую, то она не пересечет домик, и когда полицейский поравняется с точкой  $F_{-n}$ , он увидит вора.

2.9. Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ ,  $M$  — точка пересечения медиан,  $CN = m$  — медиана стороны  $AB$  (см. рисунок 2.9).

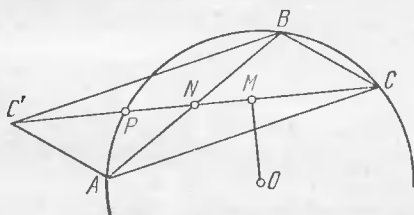


Рис. 2.9.

Тогда  $2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4m^2$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $CN$  с описанной окружностью. Рассмотрим хорды  $PC$  и  $AB$ , пересекающиеся в точке  $N$ , получим  $PN \cdot m = c^2/4$ .

Если дано, что  $OM \perp CN$ , то  $M$  — середина хорды  $PC$ ,  $PN = 2CM - CN = m/3$ ,  $PN \cdot m = m^2/3 = c^2/4$  и  $a^2 + b^2 = c^2/2 + 2m^2 = 2c^2$ .



Наоборот, если дано, что  $a^2 + b^2 = 2c^2$ , то

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2, \quad PN \cdot m = c^2/4 = m^2/3,$$

откуда  $PN = m/3$ . Поскольку  $MN = m/3$  и  $CM = 2m/3$ , то  $M$  — середина хорды  $PC$  и, следовательно,  $OM \perp CN$ .

**2.10.** Пусть точки  $K, L, M$  и  $N$  взяты соответственно на сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  параллелограмма. Предположим, что  $LN$  не параллельна  $AB$ . Заметьте, что если точка  $K$  зафиксирована, а  $M$  движется по стороне  $CD$  от  $C$  к  $D$ , то площадь  $KLMN$  меняется монотонно: или все время увеличивается, или все время уменьшается. Поэтому только один раз она может равняться половине площади  $ABCD$ . Докажите, что это будет тогда, когда отрезок  $MK$  станет параллельным  $AD$  и  $BC$ .

**3.1.** Докажите, что если соединить середины сторон четырехугольника  $ABCD$ , то получится параллелограмм  $PQRS$ , площадь которого вдвое меньше площади  $ABCD$ . Заметьте, что построенный в условии «отраженный четырехугольник» можно получить из параллелограмма  $PQRS$  преобразованием подобия (гомотетией) с коэффициентом подобия 2 и центром в точке  $M$  (см. рисунок).

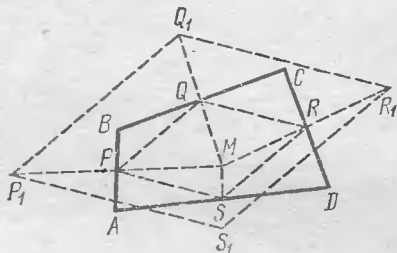


Рис. 3.1.

**3.2.** Докажите, что треугольники  $ADE, CFD$  и  $BFE$  (см. рисунок) равны: треугольник  $CFD$  получается из  $BFE$  поворотом на  $60^\circ$  вокруг точки  $F$ , а  $ADE$  из того же  $BFE$  — поворотом на  $60^\circ$  вокруг точки  $E$ .

**3.3.** Пусть  $ABC$  — один из треугольников, о которых говорится в условии (см. рисунок). Совершим

преобразование подобия (гомотетию) с центром в точке  $C$  и коэффициентом подобия  $k = 2$ . При этом преобразовании треугольник  $ABC$  перейдет в треугольник  $A_1B_1C$ , а окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , — в окружность вдвое большего радиуса, касающуюся данной прямой в точке  $A$  и, кроме

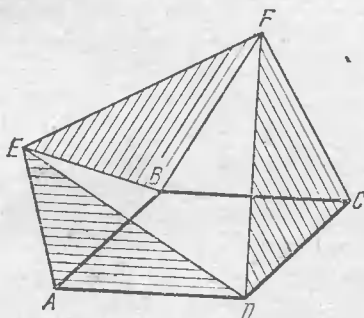


Рис. 3.2.

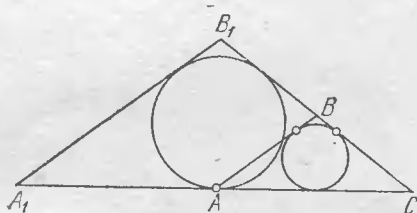


Рис. 3.3.

того, касающуюся прямой  $BC$ . Очевидно, это и есть искомая окружность, которой касаются стороны  $BC$  всех треугольников.

3.4. а) Нарисуем обе карты на одном чертеже (см. рисунок). Получим два подобных прямоугольника с коэффициентом подобия  $\frac{1}{3}$ , один из которых расположен внутри другого. Докажите, что четыре прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  пересекутся в одной точке  $O$  (центре подобия прямоугольников  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ ). Проверьте, что точка  $O$  — искомая. Других точек, удовлетворяющих условию задачи, нет. Докажите это.

б) Пусть  $A$  и  $B$  — два каких-то пункта на большей карте (скажем, ее соседние углы, см. рисунок),

$A_1$  и  $B_1$  — соответствующие пункты на меньшей карте. Предположим, что мы нашли такую точку  $O$ , которая на обеих картах указывает один и тот же пункт города. Тогда треугольники  $AOB$  и  $A_1OB_1$  должны быть подобны друг другу с коэффициентом

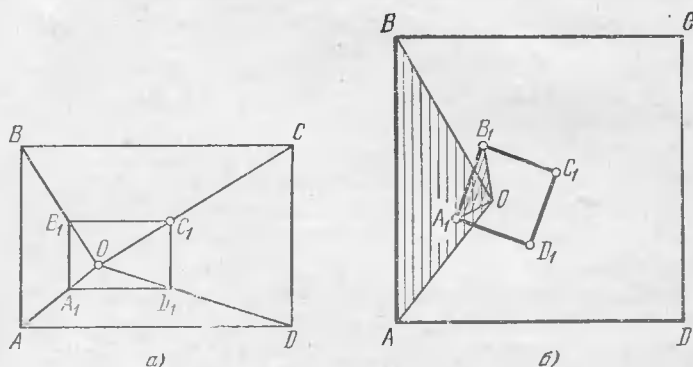


Рис. 3.4.

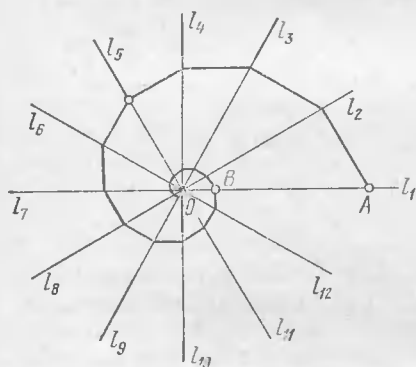


Рис. 3.5.

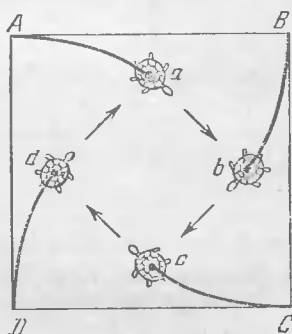


Рис. 3.6.

подобия, равным отношению масштабов 5, откуда  $AO:A_1O = 5$ , и угол между отрезками  $AO$  и  $A_1O$  равен углу  $\varphi$  между отрезками  $AB$  и  $A_1B_1$ . По этим данным положение точки  $O$  однозначно определяется (легко построить  $\triangle AA_1O$ , в котором известны:  $\angle A_1OA = \varphi$ , отношение сторон  $A_1O:AO = 5$  и сторона  $AA_1$ ). Докажите, что для построенной точки  $O$  треугольники  $AOB$

и  $A_1OB_1$  будут подобны — отсюда будет следовать, что  $O$  действительно попадает в один и тот же пункт на обеих картах. (При этом карта  $ABCD$  получается из карты  $A_1B_1C_1D_1$  поворотом на угол  $\varphi$  и растяжением в 5 раз относительно центра  $O$ .)

**З а м е ч а н и е.** Подумайте, останется ли верным утверждение задачи, если одна из карт перевернута другой стороной.

**3.5.** Предположим, что муравей начал свой путь в точке  $A$  и после первого витка оказался в точке  $B$  (на том же луче  $l_1$ , см. рисунок). Проверьте, что  $OB/OA = (\sqrt{3}/2)^{12} = 729/4096$ .

Докажите, что длина каждого следующего витка составляет  $729/4096$  длины предыдущего. Отсюда следует, что на второй виток муравей потратит  $729/4096$  мин  $\approx 10,7$  сек, а на весь путь из бесконечного числа витков, подобных друг другу (с коэффициентом подобия  $k = 729/4096$ ) —

$$(1 + k + k^2 + k^3 + \dots) \text{ мин} = \frac{1}{1-k} \text{ мин} = \\ = \frac{4096}{3367} \text{ мин} \approx 1 \text{ мин } 12,5 \text{ сек.}$$

**3.6.** Прежде всего из соображений симметрии ясно, что черепахи могут встретиться только в центре квадрата  $O$  и, более того, что в каждый момент времени (до встречи) они располагаются в вершинах некоторого квадрата с центром  $O$  (см. рисунок). Докажем это подробнее.

Из условия задачи следует, что если повернуть квадрат на  $90^\circ$  так, чтобы вершина  $A$  перешла в  $B$ ,  $B$  в  $C$  и т. д., то траектория черепахи  $a$  (до какого-то момента  $t$ ) совпадает с траекторией  $b$ , траектория  $b$  — с траекторией  $c$  и т. д.

Поскольку каждая черепаха по условию ползет все время по направлению к следующей, то ее скорость в каждый момент времени направлена под углом  $45^\circ$  к отрезку, соединяющему ее с точкой  $O$ . Другими словами, проекция скорости на этот отрезок равна  $v/\sqrt{2}$ . Таким образом, расстояние черепахи от центра  $O$  уменьшается равномерно со скоростью  $v/\sqrt{2}$ . Следовательно, это расстояние станет

равным нулю при  $t = q/v$  (вначале оно равно  $q/\sqrt{2}$ ), т. е. черепахи встретятся через промежуток времени  $q/v$  после отправления.

**Замечание.** Мы выяснили, что сторона квадрата уменьшается равномерно со скоростью  $v$ . При этом квадрат вращается вокруг точки  $O$  с возрастающей угловой скоростью  $\omega = \frac{v}{q - vt}$  (подумайте, как получить эту формулу), а каждая его вершина движется по некоторой кривой, которая называется *логарифмической спиралью*, и описывает бесконечное число оборотов вокруг точки  $O$  (примерно так же, как муравей в предыдущей задаче).

**4.1.** Докажите, что если на продолжении отрезка  $AK$ , где  $K$  — середина отрезка  $EF$ , отложить отрезок  $KC = AK/3$ , то получится вершина  $C$  параллелограмма. Затем находятся вершины  $B$  и  $D$  (см. рисунок).

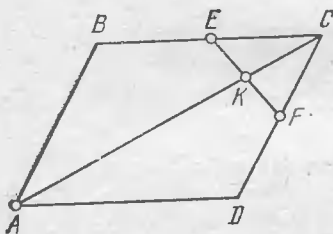


Рис. 4.1.

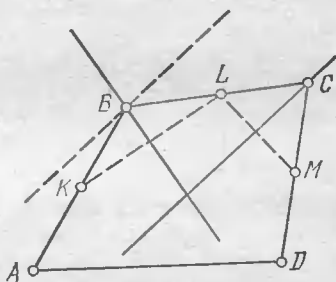


Рис. 4.2.

**4.2.** Пусть  $K, L, M$  — известные нам середины трех последовательных сторон  $AB = BC = CD$  искомого четырехугольника  $ABCD$ . Ясно, что вершины  $B$  и  $C$  должны лежать на перпендикулярах, проведенных через середины отрезков  $KL$  и  $LM$ .

Осталось решить такую вспомогательную задачу: *построить отрезок  $BC$  с концами на данных прямых и серединой в данной точке  $L$* . Для этого достаточно провести прямую, симметричную относительно точки  $L$  одному из построенных перпендикуляров (см. рисунок).

Проведите исследование вспомогательной и исходной задачи; докажите, что искомым четырехугольник  $ABCD$  определяется единственным образом, если

точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  не лежат на одной прямой (а если лежат, то таких четырехугольников либо совсем нет, либо — если  $KL = LM$  — их существует бесконечно много). Построенная таким образом ломаная  $ABCD$  может быть не выпуклой или даже самопересекающейся.

4.3. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — известные нам последовательные вершины четырехугольника  $ABCD$  (см. рисунок),  $O$  — центр вписанной в него окружности. Докажите, что угол  $AOC$  (содержащий точку  $B$  внутри себя) равен  $270^\circ - \angle ABC$  (для этого нужно соединить точку  $O$  с точками касания сторон и вершинами четырехугольника). Геометрическое место таких точек  $O$  — дуга с концами  $A$  и  $C$ , которую нетрудно построить. Заметьте, кроме того, что точка  $O$  лежит на биссектрисе угла  $ABC$ .

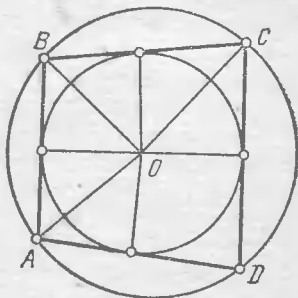


Рис. 4.3.

4.4. а) Постройте середину  $K$  хорды  $BC$  — стороны искомого треугольника  $ABC$ . Для этого достаточно продолжить отрезок  $AM$  на расстояние  $MK = AM/2$ . Осталось провести через точку  $K$  радиус и перпендикулярную ему прямую.

Докажите, что искомый треугольник существует в том и только в том случае, когда построенная нами точка  $K$  лежит внутри данной окружности; он определяется единственным образом, если  $K$  не совпадает с центром окружности (если совпадает, то решений бесконечно много).

б) Докажите сначала, что в любом треугольнике точки, симметричные ортоцентру (точке пересечения высот) относительно сторон, лежат на описанной окружности. Для доказательства нужно выразить угол, под которым из ортоцентра видны стороны треугольника, через противолежащий этой стороне угол треугольника (не забудьте рассмотреть и случай тупоугольного треугольника!). Пользуясь этим и зная, что прямая  $AM$  идет по высоте, нетрудно восстановить прямую  $BC$ . Задача всегда имеет единственное решение.

4.5. Докажите сначала, что: если в треугольнике  $ABC$  соединить основания высот, то получится треугольник, для которого стороны и высоты данного треугольника  $ABC$  являются биссектрисами внутренних и внешних углов.

Предположим теперь, что нам известны точки  $E$  и  $F$  — основания высот  $BE$  и  $CF$  треугольника  $ABC$ , а также прямая  $l$ , на которой лежит высота  $AD$ . Мы должны указать на прямой  $l$  такую точку  $D$ , чтобы в треугольнике  $DEF$  прямая  $l$  шла по биссектрисе. Для этого достаточно построить точку  $E'$ , симметричную точке  $E$  относительно прямой  $l$ , и принять за  $D$  точку пересечения прямых  $E'F$  и  $l$ . Докажите, что прямая  $BC$  должна служить биссектрисой внешнего угла  $D$  треугольника  $DEF$ , а прямые  $AC$  и  $AB$  — либо обе биссектрисами внутренних, либо биссектрисами его внешних углов  $E$  и  $F$ . Искомых треугольников  $ABC$  существует два, если прямая  $l$  не проходит через середину отрезка  $EF$ , бесконечно много, если проходит и перпендикулярна этому отрезку, и нет ни одного, если проходит, но не перпендикулярна.

4.6. Докажите, что в любом треугольнике  $ABC$  окружность, построенная на основании  $AC$ , как на диа-

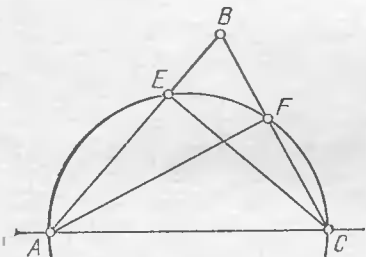


Рис. 4.6.

метре, проходит через точки  $E$  и  $F$  — основания высот, опущенных на боковые стороны (см. рисунок). Пользуясь данными задачи, т. е. зная точки  $E$ ,  $F$  и прямую  $l$ , на которой лежит  $AC$ , легко восстановить эту окружность: ее центр будет лежать на пересечении прямой  $l$  и перпендикуляра,

проведенного через середину отрезка  $EF$ . Построив эту окружность, мы найдем точки пересечения ее с  $l$ . Одну из них можно принять за  $A$ , другую — за  $C$ . Третья вершина  $B$  треугольника находится как точка пересечения прямых  $AE$  и  $CF$ .

Проверьте, что если отрезок  $EF$  не перпендикулярен прямой  $l$ , то существует два треугольника, удовлетворяющих требованиям задачи, а если  $EF \perp l$ , то их либо нет совсем, либо (если точки  $E$  и  $F$  симмет-

ричны относительно прямой  $l$ ) существует бесконечно много.

4.7. Пусть заданы прямая  $l$ , на которой лежит биссектриса угла  $B$ , точка  $E$  — середина стороны  $BC$  и точка  $F$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . Нетрудно указать одну точку, которая заведомо лежит на прямой  $AB$ : это — точка  $D$ , симметричная точке  $E$  относительно  $l$ . Кроме того, мы знаем и направление прямой  $AB$ : она параллельна  $EF$ . Построив по этим данным прямую  $AB$ , мы последовательно найдем вершины  $B$ ,  $C$  и  $A$ . Не забудьте провести исследование. Его результат можно сформулировать так: искомый треугольник существует тогда и только тогда, когда луч  $EF$  (т. е. луч с вершиной  $E$ , проходящий через точку  $F$ ) пересекает прямую  $l$ , и при этом условии треугольник определяется единственно.

4.8. Простое решение этой задачи основано на теореме Эйлера, утверждающей, что в любом треугольнике точка пересечения медиан лежит на отрезке, проведенном из точки пересечения высот в центр

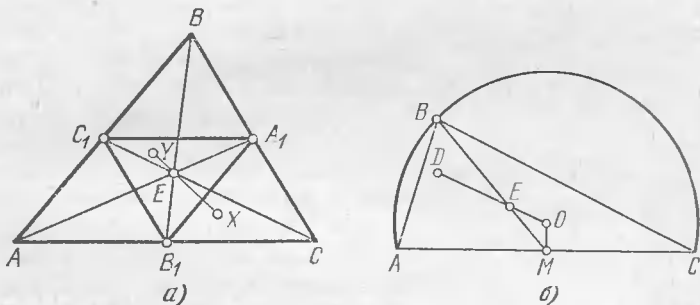


Рис. 4.8.

описанного круга, и делит этот отрезок в отношении 2 : 1.

Докажем эту теорему. Для этого заметим, что треугольник  $A_1B_1C_1$  (см. рисунок а), образуемый средними линиями треугольника  $ABC$ , можно получить из  $\triangle ABC$  подобным преобразованием плоскости, с неподвижной точкой  $E$  — точкой пересечения медиан; при этом преобразовании каждой точке



Х плоскости ставится в соответствие точка  $Y$ , лежащая на прямой  $EX$  по другую сторону от  $E$ , чем точка  $X$ , и вдвое ближе к  $E$  (это преобразование — гомотетия с коэффициентом  $-1/2$  и с центром  $E$ ). При таком преобразовании точка пересечения высот треугольника  $ABC$  перейдет в точку пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ , а это и есть точка пересечения перпендикуляров к серединам сторон треугольника  $ABC$ . Теперь решать задачу на построение можно так. Пользуясь теоремой Эйлера, по данным точкам  $D$  (точка пересечения высот) и  $E$  (медиан) находим центр  $O$  описанной окружности. Затем опускаем из точки  $O$  перпендикуляр  $OM$  на данную прямую, на продолжении отрезка  $ME$  откладываем отрезок  $EB = 2ME$ , находим вершину  $B$  и, наконец, проведя окружность с центром  $O$  радиуса  $OB$ , находим точки ее пересечения  $A$  и  $C$  с данной прямой (см. рисунок б). Если эта окружность пересекает прямую, то полученный треугольник  $ABC$  — искомый: в нем по построению  $O$  — центр описанной окружности и  $E$  — точка пересечения медиан, следовательно (по те-

реме Эйлера),  $D$  — точка пересечения высот. Если же окружность не пересекает прямую (в частности, только касается), то нужного треугольника не существует.

**4.9.** Одно из возможных решений задачи б) показано на рисунке (номера, стоящие на линиях, показывают, в какой последовательности они строились). Задача а) значительно проще.

**4.10.** Докажите сначала, что с помощью «короткой» линейки и «маленького» циркуля можно выполнять следующие операции:

- а) неограниченно продолжать данный отрезок прямой в любую сторону,
- б) находить середину данного отрезка,
- в) проводить через точку вне прямой  $l$  прямую, параллельную  $l$ .

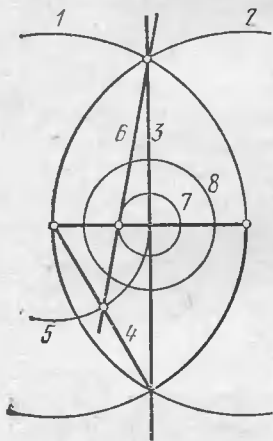


Рис. 4.9.

Проведем теперь через данную точку  $A$  две прямые  $l_1$  и  $l_2$  и через  $B$  — две прямые, параллельные  $l_1$  и  $l_2$ . Получится параллелограмм  $ACBD$  (см. рисунок). Поделив стороны  $AC$  и  $AD$  точками  $C_1$  и  $D_1$  пополам и проведя через них прямые, параллельные  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, мы найдем середину отрезка  $AB$  (пока еще не построенного!) — точку  $B_1$ . Продолжая

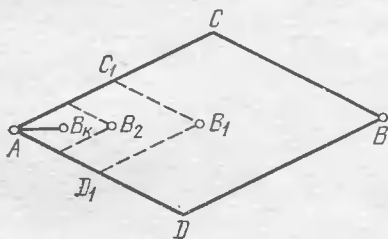


Рис. 4.10.

в том же духе, строим  $B_2$  — середину  $AB_1$  и так далее, пока какой-то из отрезков  $AB_n$  не станет меньше 10 см. После этого построение завершается без труда.

**4.11.** Докажите сначала такое утверждение: если через точку  $O$  провести три различные окружности одинакового радиуса  $r$ , то три точки попарного пересечения этих окружностей, отличные от  $O$ , являются вершинами треугольника, у которого радиус описанной окружности равен  $r$ , а точка  $O$  является точкой пересечения высот. Для доказательства можно воспользоваться тем, что этот треугольник равен треугольнику  $O_1O_2O_3$ , где точки  $O_1, O_2, O_3$  — центры проведенных окружностей (проведите в  $\triangle O_1O_2O_3$  средние линии).

Теперь вы сможете доказать, что для решения задачи достаточно провести пять окружностей. Пусть даны точки  $A, B, C$  и нужно построить четвертую вершину  $D$  параллелограмма  $ABCD$ . Сначала проведем две окружности через точки  $A$  и  $B$  (см. рисунок) и еще одну — через точки  $B$  и  $C$ ; ее центр обозначим через  $O_1$ , а точки, в которых она пересекает две первые окружности, — через  $E$  и  $F$ . Проведем теперь еще по одной окружности через точки  $C$  и  $E$  и через точки  $C$  и  $F$ . Пусть они пересекаются в точке

*D.* Докажите, что точки  $A$ ,  $E$ ,  $F$  и  $D$  лежат на одной окружности (обозначим ее центр  $O_2$ ) и что  $AB \perp EF$ ,  $CD \perp EF$ ,  $AB = CD = O_1O_2$ , откуда следует, что  $D$  — искомая вершина параллелограмма.

Если вы захотите проверить решение практически, то удобнее будет пользоваться не пятакom, а металлическим рублем или, еще лучше, консервной

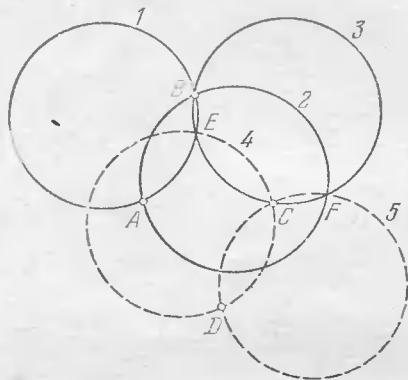


Рис. 4.11.

банкой. (Можно, конечно, пользоваться и циркулем, но это не так интересно.)

4.12. Наложим один из пятаков на окружность (почему это можно сделать?). Прикладывая по очереди к этому пятакu два других так, чтобы они попарно касались друг друга, построим вершины правильного шестиугольника  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ , вписанного в окружность. Прикладывая снаружи к точкам  $A_1$  и  $A_3$  пятак, построим дугу, проходящую через центр. Построив такую же дугу для точек  $A_2$  и  $A_4$ , найдем центр.

5.1. Ответ.  $45^\circ$ .

Пусть  $D$  — основание высоты, опущенной из точки  $A$ . Докажите, что треугольники  $COD$  и  $ABD$  равны. Покажите, далее, что  $\angle OBD = 45^\circ$ , а отсюда выведите, что искомый угол также равен  $45^\circ$ .

Другое решение можно получить, повторив почти дословно рассуждения, приведенные при решении задачи 5.3 вторым способом.

5.2. Ответ.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ .

Заметьте, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла с точкой деления, будет высотой треугольника.

5.3. Ответ.  $60^\circ$ .

1-е решение. Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $M$  — ортоцентр,  $CC'$  — диаметр описанной окружности (см. рисунок а). Вписанные углы  $ABC$  и  $AC'C$  равны, значит, равны острые углы  $MCB$  и  $ACO$ , дополняющие их до  $90^\circ$ .

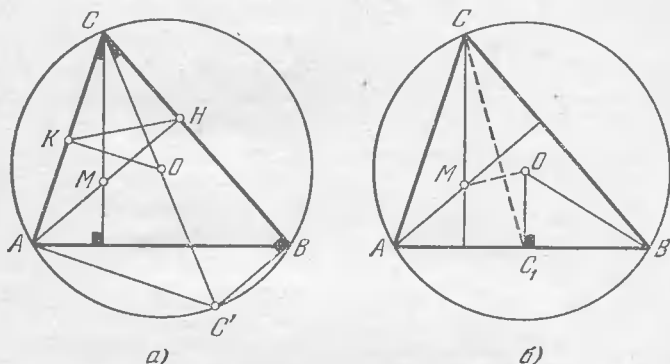


Рис. 5.3.

Пусть  $K$  — середина  $AC$ ,  $H$  — основание высоты, опущенной на  $BC$ . Медиана  $KH$  прямоугольного треугольника  $ACH$  равна  $AC/2 = KC$  (она является радиусом окружности, описанной около  $ACH$ ).

Оба эти факта верны для любого треугольника  $ABC$ . Кроме того, в данном треугольнике  $KC = CH$ . Это следует из равенства прямоугольных треугольников  $KCO$  и  $CHM$  ( $CM = CO$  по условию и  $\angle KCO = \angle HCM$  по доказанному). Следовательно, треугольник  $KCH$  — равносторонний, и искомый угол  $C$  равен  $60^\circ$ .

2-е решение. Оно основано на следующем наблюдении: в любом треугольнике расстояние от ортоцентра до вершины в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны (на рисунке б  $CM = 2OC_1$ ). Этот факт попутно получается при доказательстве теоремы Эйлера (см. решение задачи 4.8). Теперь из условия

5.4. Ответ.  $\angle C = 90^\circ$ .

Рис. 5.4.

перпендикулярны) и по условию  $AO_1 = AO_2$ , то  $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = 45^\circ$ . Теперь докажите, что  $\angle C = 180^\circ - 2\angle BO_2A$ . Для этого опустите из  $O_2$  перпендикуляры на  $AC$ ,  $BC$  и  $AB$ .

5.5. Ответ.  $90^\circ$ .

Обозначим длину стороны  $AB$  через  $c$ ,  $AC$  — через  $b$  и  $BC$  — через  $a$ . Докажем сначала, что  $AA_1 = \frac{bc}{b+c}$ .

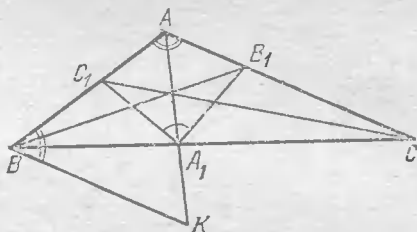


Рис. 5.5.

44

$BA_1K$  и  $AA_1C$  получаем  $\frac{c - AA_1}{AA_1} = \frac{c}{b}$ , откуда и следует, что  $AA_1 = \frac{bc}{b+c}$ .

Так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то  $\frac{BA_1}{a - BA_1} = \frac{c}{b}$ , откуда  $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ . Значит,  $AA_1 : BA_1 = b : a$ . В том же отношении основание  $C_1$  биссектрисы  $CC_1$  делит сторону  $BA$ . Отсюда следует, что  $A_1C_1$  — биссектриса угла  $A_1$  треугольника  $BA_1A$ . Так же доказывается, что  $A_1B_1$  — биссектриса угла  $AA_1C$ . Следовательно,  $\angle C_1A_1B_1 = (\angle BA_1A + \angle AA_1C)/2 = 90^\circ$ .

5.6. Ответ.  $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ .

Ясно, что этот треугольник  $ABC$  — равнобедренный. Пусть  $AB$  — его основание,  $O$  — центр описанной окружности. Докажите, что  $\angle ACO = \angle CAO = \frac{3}{2}\angle CAB$ .

5.7. Ответ.  $70^\circ$ .

Пусть  $K$  — точка пересечения высоты, опущенной из вершины  $B$ , и биссектрисы угла  $OAB$  (см. рисунок). Покажите сначала, что точка  $K$  лежит на продолжении  $OC$ . Затем докажите, что треугольники

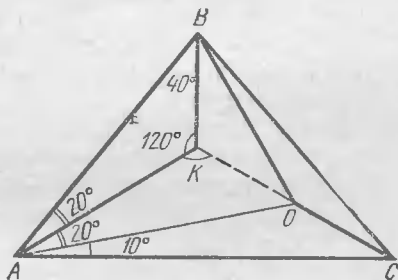


Рис. 5.7.

$ABK$  и  $AOK$  равны (по стороне и двум прилежащим углам) и из равнобедренного треугольника  $OAB$  найдите искомый угол.

5.8. Докажите сначала, что расстояние от вершины  $A$  произвольного треугольника  $ABC$  до точек касания сторон  $AB$  и  $AC$  с вписанной окружностью равно  $(AB + AC - BC)/2$ .

6.1. Докажите сначала, что в произвольном выпуклом четырехугольнике расстояние между точками  $K_1$  и  $K_2$ , в которых окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , касаются диагонали  $AC$  (см. рисунок), равно

$$\frac{1}{2} |(AD + BC) - (AB + CD)|.$$

Воспользуйтесь далее теоремой о четырехугольнике, в который можно вписать окружность.

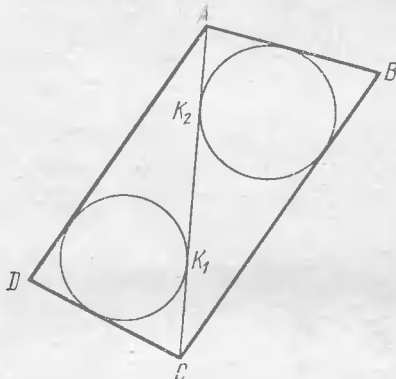


Рис. 6.1.

6.2. а) Пусть  $M$  лежит на дуге  $A_1A_2$  окружности  $O$  (рисунок а). Повернем треугольник  $A_1MA_2$  вокруг вершины  $A_2$  на  $60^\circ$  так, чтобы отрезок  $A_1A_2$  лег на отрезок  $A_0A_2$ . Докажите, что тогда вершина  $M$  попадает в точку  $K$ , лежащую на отрезке  $A_0M$ . Треугольник  $KMA_2$  будет равносторонним. Отсюда будет следовать, что  $A_1M + A_2M = A_0K + KM = A_0M$ .

Другое решение той же задачи легко получить из теоремы Птолемея: для любого вписанного (выпуклого) четырехугольника  $ABCD$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Достаточно применить эту теорему к четырехугольнику  $A_0A_1MA_2$ ; поскольку  $A_0A_1 = A_1A_2 = A_0A_2$ , то из равенства

$$A_1A_2 \cdot A_0M = A_0A_1 \cdot A_2M + A_0A_2 \cdot A_1M$$

сразу следует равенство  $A_0M = A_2M + A_1M$ .

Заметим, что теорему Птолемея можно доказать с помощью чертежа, очень похожего на наш рисунок *a* (но при этом использовать уже не просто поворот, а преобразование подобия). План доказательства таков: найдем на диагонали *AC* такую точку *K*,

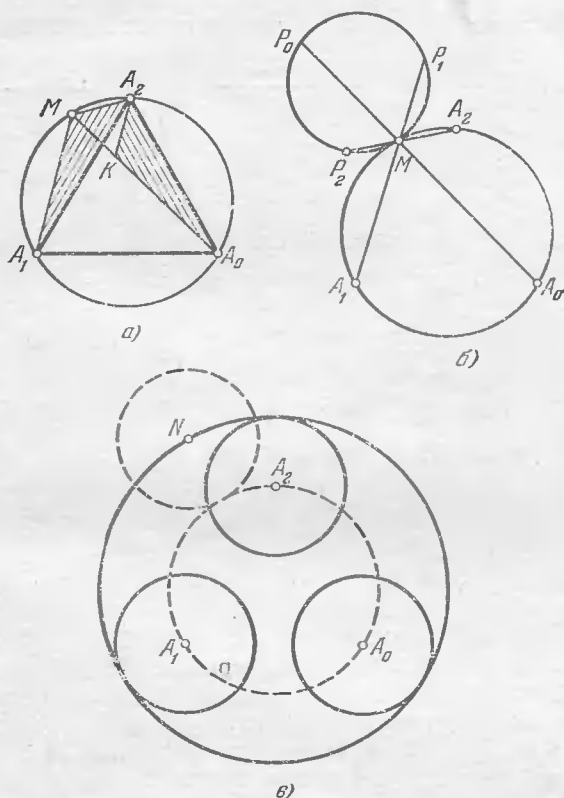


Рис. 6.2.

чтобы треугольники *AKD* и *BCD* были подобны ( $\angle AKD = \angle BCD$ ), тогда  $AK \cdot BD = BC \cdot AD$ ; докажем, что при этом треугольники *KCD* и *ABD* подобны ( $\angle KDC = \angle ADB$ ), тогда  $KC \cdot BD = AB \cdot CD$  и в результате  $(AK + KC)BD = AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$ .

б) Пусть новая окружность касается окружности *O* внешним образом в точке *M*, лежащей на дуге



$A_1A_2$ . Вспомним, что квадрат касательной равен произведению отрезков любой секущей (от данной точки до точек пересечения с окружностью). Проведем секущие через точки  $A_0, A_1, A_2$  и точку  $M$  и обозначим через  $P_0, P_1, P_2$  соответственно их вторые точки пересечения с новой окружностью (рисунок б). Мы должны доказать, что

$$\sqrt{A_0M \cdot A_0P_0} = \sqrt{A_1M \cdot A_1P_1} + \sqrt{A_2M \cdot A_2P_2}. \quad (1)$$

В задаче а) мы доказали, что

$$A_0M = A_1M + A_2M. \quad (2)$$

Остается заметить, что новая окружность получается из старой гомотетией (подобным преобразованием) с центром в точке  $M$ , поэтому

$$\frac{MP_0}{A_0M} = \frac{MP_1}{A_1M} = \frac{MP_2}{A_2M} = k,$$

где  $k$  — отношение радиусов окружностей, откуда

$$\frac{A_0P_0}{A_0M} = \frac{A_1P_1}{A_1M} = \frac{A_2P_2}{A_2M} = 1 + k,$$

т. е. каждый член (1) отличается от соответствующего члена (2) только множителем  $\sqrt{1+k}$ . Поэтому из (2) следует (1).

Рассмотрите сами случай, когда новая окружность касается окружности  $O$  внутренним образом.

в) Эта задача сводится к предыдущей с помощью следующего красивого приема (подробно обсуждаемого во втором томе книги И. М. Яглома «Геометрические преобразования»).

Пусть  $r$  — радиус равных окружностей. Проведем новые окружности (на рисунке в они показаны пунктиром): одну — через точки  $A_0, A_1$  и  $A_2$  с центром  $O$  и другую — с центром  $N$  радиуса  $r$ . Тогда (и это — основное свойство нашего преобразования) касательная, проведенная из точки  $N$  к окружности радиуса  $r$  с центром  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), будет равна касательной, проведенной из точки  $A_i$  к окружности радиуса  $r$  с центром  $N$ . Это, конечно, очевидно — эти две касательные являются противоположными сторонами прямоугольника. Но тем самым задача в) сведена к задаче б).

### 6.3. Ответ. 4 оборота.

Из рисунка *a* видно, что за то время, пока подвижный пятак, изображенный пунктиром прокатится по дуге  $\alpha$  неподвижного пятока с центром  $O$ , он повернется на угол  $2\alpha$ : на этом рисунке  $M'A'$  — новое положение радиуса  $MA$ , радиусы  $MA$  и  $M'A''$  параллельны,  $\angle A''M'B = \angle AOB = \alpha$ , и так как дуги  $A'B$  и  $AB$  равны, то  $\angle BM'A' = \alpha$ , следовательно, весь угол  $\angle A''M'A'$ , на который повернется подвижный пятак, равен  $2\alpha$ .

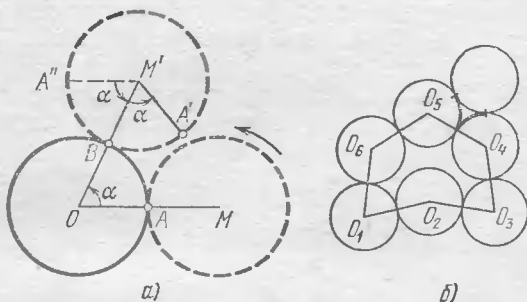


Рис. 6.3.

Теперь найдем сумму дуг (в градусах), состоящих из таких точек неподвижных пятак, которых подвижный пятак касался при качении по цепочке. Пусть  $O_1, O_2, \dots, O_6$  — центры неподвижных пятак (см. рисунок б). Сумма дуг, лежащих внутри шестиугольника  $O_1O_2 \dots O_6$ , равна сумме его внутренних углов, т. е.  $180^\circ \cdot 6 - 360^\circ = 720^\circ$ . Действительно, сумма внутренних углов любого  $n$ -угольника, не обязательно выпуклого, равна  $180^\circ n - 360^\circ$  (докажите это сами или прочтите доказательство, например, в книге Д. О. Шклярского и др. «Избранные задачи и теоремы планиметрии», «Наука», 1967, задача 108). Сумма дуг, лежащих вне этого шестиугольника, равна  $360^\circ \cdot 6 - 720^\circ = 1440^\circ$ . Из нее нужно вычесть еще сумму дуг, лежащих в углублениях между двумя соседними пятаками, куда подвижный пятак не попадет; в каждом из шести углублений сумма двух таких дуг равна  $120^\circ$  (на рисунке б эти дуги показаны жирной линией). Итак, общая сумма дуг, по которым

прокатится пятак, равна  $1440^\circ - 120^\circ \cdot 6 = 720^\circ$ , а искоемое число оборотов получится, если эту величину умножить на 2 и разделить на  $360^\circ$ .

6.4. Соедините последовательно центры кругов и докажите, что вершины данного четырехугольника расположены на сторонах построенного четырехугольника.

Для этого достаточно заметить, что центры кругов лежат на биссектрисах внешних углов данного четырехугольника. То же наблюдение позволит вам выразить углы построенного четырехугольника через углы данного и доказать, что суммы противоположных углов построенного четырехугольника равны по  $180^\circ$ .

6.5. а) Углы  $A_2$  и  $A_7$  десятиугольника равны как углы с соответственно параллельными сторонами.

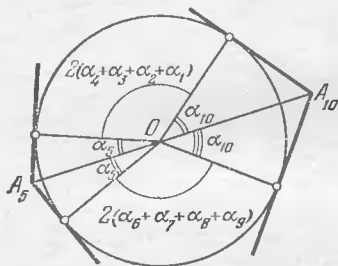


Рис. 6.5.

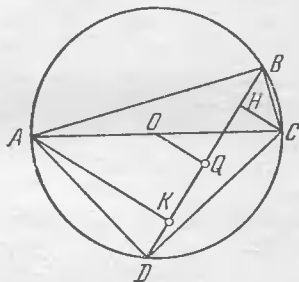


Рис. 6.6.

Дуги  $A_1A_2A_7$  и  $A_6A_7A_8$  равны как дуги сегментов, вмещающих равные углы. Так же доказывается, что равны дуги  $A_3A_4A_5$  и  $A_8A_9A_{10}$ . Отсюда следует, что равны дуги  $A_1A_3A_5$  и  $A_6A_8A_{10}$ , а, значит, и хорды  $A_1A_5$  и  $A_6A_{10}$ . Выведите отсюда, что  $A_5A_6 \parallel A_1A_{10}$ .

б) Проведем радиусы во все точки касания. Обозначим  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ) угол, который образует отрезок  $OA_k$  с соседними радиусами. По условию

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_6 + \alpha_7, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_8 + \alpha_9.$$

Сложив эти равенства, получаем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9.$$

Отсюда уже следует (см. рисунок), что лучи  $OA_5$  и  $OA_{10}$  образуют развернутый угол.

**Замечание.** Проверьте, что утверждение задачи а) и б) верно для любого  $(4m + 2)$ -угольника ( $m$  — натуральное).

**6.6.** Пусть диагональ  $AC$  четырехугольника  $ABCD$  (см. рисунок) является диаметром описанной окружности с центром  $O$ , а точки  $H$  и  $K$  — проекции точек  $C$  и  $A$  на  $BD$ . Проведем  $OQ \perp BD$ . По теореме о диаметре, перпендикулярном хорде,  $DQ = QB$ .

Поскольку радиусы  $AO$  и  $OC$  равны и составляют равные углы с прямой  $BD$ , их проекции на эту прямую также равны:  $KQ = QH$ . Поэтому  $DK = HB$  и  $DH = KB$ .

**6.7.** Треугольник  $ABF$  (см. рисунок) равнобедренный ( $AB = AF$ ), поскольку  $\angle ABF = \angle FBC = \angle AFB$  (первое равенство верно, поскольку точки  $A$  и  $C$  симметричны относительно диаметра  $BE$ , а второе — поскольку  $BC \parallel AD$ ). В треугольнике  $FED$  отрезок прямой  $EC$  является биссектрисой (поскольку  $\angle BEC$  и  $\angle CED$  опираются на равные дуги) и высотой (поскольку  $BC \parallel AD$ , а угол  $BCE$  опирается на диаметр), поэтому  $EC$  является и медианой.

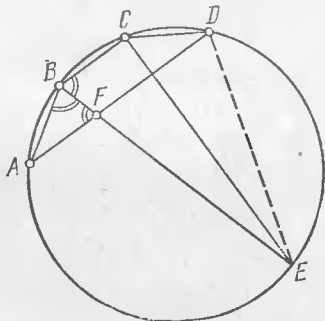


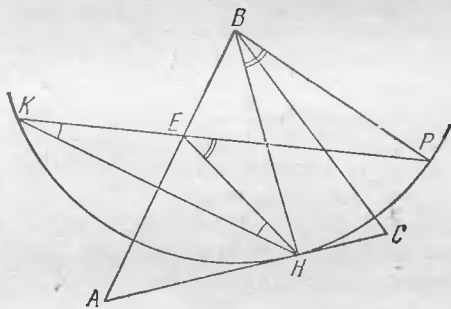
Рис. 6.7.

Если вы решали задачу другим способом, проверьте, не забыли ли вы учесть, что точка  $F$  может лежать как внутри, так и вне окружности.

**6.8.** Рассмотрите точку пересечения двух из указанных в условии окружностей и докажите, что она лежит на третьей. Для этого воспользуйтесь теоремой о сумме противоположных углов вписанного четырехугольника и обратной ей теоремой.

**6.9.** Рассмотрим окружность (см. рисунок), проходящую через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Вписанные углы  $MBD$  и  $MCD$ , опирающиеся на дугу  $MD$  этой окружности, равны, и так как  $\angle MCD = \angle MAB$ , то  $\angle MAB = \angle MBD$  (см. рисунок). Выведите отсюда, что прямая  $BD$  касается окружности, описанной около

**6.10.** Пусть  $E$  — точка пересечения  $KP$  и  $AB$  (см. рисунок). Точки  $K$ ,  $H$  и  $P$  лежат на одной окружности с центром в точке  $B$ . Вписанный угол  $\angle HKP$  и центральный угол  $\angle HBP$  опираются на одну и ту же дугу этой окружности, поэтому  $2\angle HKP = \angle HBP$ .



Угол  $\angle HEP$  является внешним по отношению к треугольнику  $HEK$ , поэтому  $\angle HEP = 2 \angle HEK = \angle HBP$ . Отсюда следует, что точки  $E$ ,  $H$  и  $P$  лежат на одной окружности с диаметром  $BC$  и угол  $BEC$  — прямой.

7.1. а) Отрезки, соединяющие центр данного  $n$ -угольника с вершинами, разбивают его на  $n$  остроугольных треугольников. Разбить данный много-

угольник на меньшее число остроугольных треугольников нельзя, так как две различные стороны  $n$ -угольника не могут принадлежать одному остроугольному треугольнику (при  $n \geq 5$  все углы правильного выпуклого  $n$ -угольника тупые).

б) Легко разбить остроугольный треугольник на 3 тупоугольных — достаточно, например, соединить точку пересечения биссектрис внутренних углов этого треугольника с вершинами (докажите это).

Далее, любой правильный  $n$ -угольник можно разбить диагоналями на  $(n - 3)$  тупоугольных и один

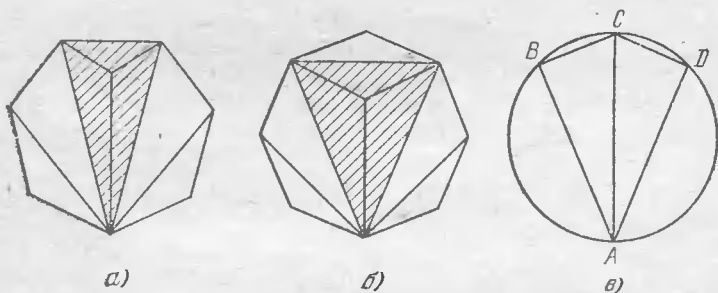


Рис. 7.1.

остроугольный треугольник (см. рисунки а и б), соответствующие нечетному и четному  $n$ ; остроугольный треугольник на рисунке заштрихован.) Разбивая этот остроугольный треугольник на 3 тупоугольных, получим разбиение данного многоугольника на  $n$  тупоугольных треугольников.

Покажем теперь, что разбиение на тупоугольные треугольники не может содержать меньше чем  $n$  треугольников. Для этого сначала докажем, что правильный  $n$ -угольник нельзя разрезать на тупоугольные треугольники, проводя только диагонали. Допустим противное. Пусть  $AC$  — наибольшая из диагоналей, участвующих в разбиении. Она является общей стороной двух треугольников разбиения —  $ABC$  и  $ADC$ . Опишем вокруг данного многоугольника окружность (см. рисунок в). Так как четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, то  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ , хотя бы один из этих

углов, скажем  $\angle ABC$ , не превосходит  $90^\circ$ . В треугольнике  $ABC$  этот угол наибольший — ему противолежит наибольшая сторона  $AC$ , значит, треугольник  $ABC$  — не тупоугольный. Противоречие.

Итак, среди вершин треугольников разбиения содержится хотя бы одна точка  $M$ , лежащая внутри данного многоугольника. Рассмотрим сумму углов всех треугольников разбиения. Углы треугольников, имеющие вершину в точке  $M$ , в сумме составляют  $360^\circ$ , а углы, вершины которых совпадают с вершинами многоугольника, в сумме составляют  $180^\circ (n - 2)$ . Значит, число треугольников, участвующих в разбиении, не может быть меньше, чем  $[180^\circ (n - 2) + 360^\circ] : 180^\circ = n$ .

7.2. Способ разрезания для любого  $n \geq 5$  ясен из рисунка.

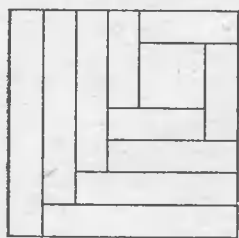


Рис. 7.2.

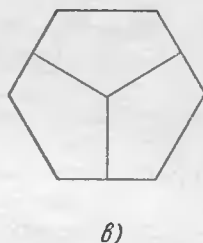
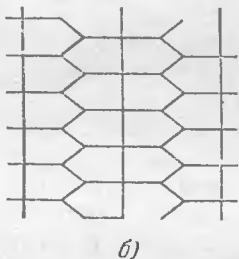
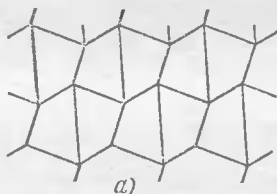


Рис. 7.3.

7.3. а) Способ укладки ясен из рисунка а. Здесь существенно используется, что сумма углов четырехугольника равна  $360^\circ$ .

б) Хотя правильный пятиугольник для этой цели не подходит, существует много разных типов пяти-

угольников, пригодных для «паркетаж» (см., например, паркетаж, показанный на рисунке б).

в) Воспользуйтесь тем, что правильный шестиугольник можно разрезать на три равных пятиугольника, без параллельных сторон (рисунок в).

7.4. Эта задача гораздо сложнее предыдущих. Идея решения состоит в следующем. Допустим, что такое покрытие возможно. Подсчитаем двумя способами среднюю величину угла семиугольника. С одной стороны, средняя величина угла в семиугольнике равна  $\frac{5 \cdot 180^\circ}{7}$ . С другой стороны, в каждом узле покрытия сходится не менее трех углов, так что средняя величина угла семиугольника не более  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ . Но  $120^\circ < \frac{900^\circ}{7}$ . Противоречие.

Реализуем эту идею строго. Допустим, что возможно покрытие плоскости равными семиугольниками. Пусть  $s$  — площадь семиугольника,  $d$  — диаметр минимального круга, содержащего семиугольник. Рассмотрим круг большого радиуса  $R$  и концентрические ему круги радиусов  $R - d$  и  $R + d$  (см. рисунок).

Число семиугольников, попавших целиком в круг радиуса  $R$ , заведомо больше, чем  $N_1 = \pi(R - d)^2/s$ .

Полная сумма углов этих семиугольников не меньше

$$\Sigma_1 = 5\pi N_1 = 5\pi^2 (R - d)^2/s.$$

С другой стороны, число семиугольников, пересекающихся с кругом радиуса  $R$ , меньше  $N_2 = \pi(R + d)^2/s$ . Поэтому число узлов покрытия, расположенных в круге радиуса  $R$ , меньше  $7N_2/3$  (у каждого семиугольника 7 вершин, но каждая из них считается как минимум 3 раза). Полная сумма углов, прилежащих к каждому узлу, равна  $2\pi$ , а по всем узлам — не более чем

$$\Sigma_2 = 2\pi \cdot 7N_2/3 = 14\pi^2 (R + d)^2/(3s).$$

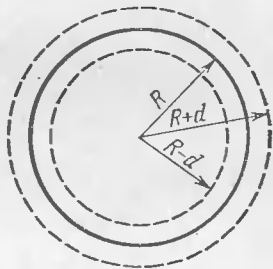


Рис. 7.4.



Очевидно, должно выполняться неравенство  $\Sigma_2 \geq \Sigma_1$ , откуда

$$14(R+d)^2 \geq 15(R-d)^2.$$

Но при достаточно больших  $R$  (при фиксированном  $d$ ) последнее неравенство невозможно. (Проверьте это!) Получили противоречие.

Замечание. В наших рассуждениях не использовалось равенство многоугольников, а лишь равенство их площадей —  $s$ , ограниченность их размеров (постоянная  $d$ ) и выпуклость (в каждом узле сходится не менее трех вершин).

7.5. а) Ход построения можно уяснить из рисунка а. Многоугольники покрытия становятся все более и более узкими. Именно поэтому результат задачи 7.5а) не противоречит рассуждениям задачи 7.4.

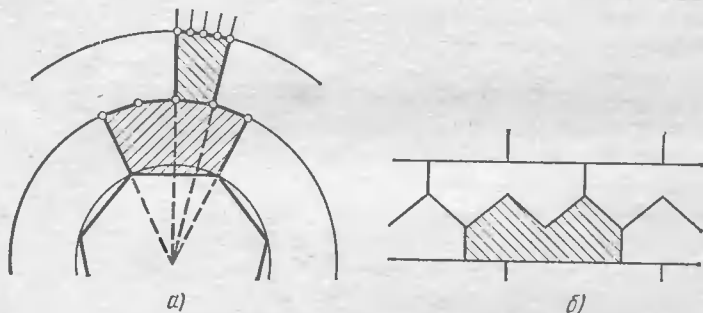


Рис. 7.5.

б) Так же как в задаче а), мы ограничимся тем, что изобразим пример паркета для  $n = 7$  (рисунок б).

7.6. Концы всех дуг разбивают окружность на несколько частей (мы берем «самые мелкие» части, так что каждая из них уже не содержит концов дуг внутри и по условию покрыта одной или несколькими дугами). Если какую-то из этих частей покрывают три или более дуг, то выберем из этих дуг две, которые простираются дальше всего по и против часовой стрелки (впрочем, это может оказаться одна и та же дуга — тогда выберем ее одну), а остальные дуги выбросим. После нескольких таких операций мы

добьемся того, что все части окружности будут покрыты не более чем двумя дугами.

7.7. Рассуждая, как в предыдущей задаче, докажите сначала, что можно удалить часть дорожек так, чтобы оставшиеся покрывали коридор, причем не более чем в два слоя.

Занумеруем теперь дорожки слева направо в порядке расположения их левых концов. Все нечетные дорожки не пересекаются между собой, то же самое верно и для четных. Либо сумма длин всех четных, либо всех нечетных дорожек не меньше половины длины коридора. (Эта задача, так же как и следующая, является переформулировкой известной задачи Радо.)

7.8. Эта задача напоминает предыдущую, однако прежние рассуждения не проходят. Именно, если несколько ковров покрывают одну область, то среди них, вообще говоря, нельзя выделить меньшее число ковров, перекрывающих все остальные (рисунок а;

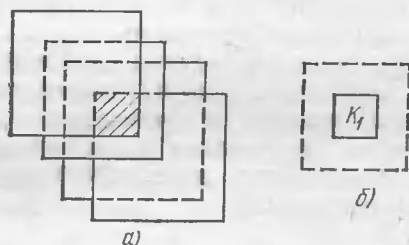


Рис. 7.8.

область, покрываемая всеми четырьмя коврами, заштрихована). Поэтому будем действовать иначе. Выделим самый большой ковер  $K_1$ . Пусть его площадь равна  $s_1$ . Удалим все ковры, перекрывающиеся с  $K_1$ . При этом освободится от ковров площадь пола, не превосходящая  $8s_1$  (рисунок б). Среди всех оставшихся ковров, кроме  $K_1$ , снова выделим ковер  $K_2$  максимальной площади  $s_2$  и удалим ковры, с ним пересекающиеся, освободив от ковров площадь пола, не превосходящую  $8s_2$ . Продолжая этот процесс, мы получим набор попарно непересекающихся ковров  $K_1, K_2, \dots$ , которые покрывают более  $1/9$  площади пола (докажите это).

7.9. Будем изображать время на оси  $OT$  (см. рисунок). Время наблюдения изобразится отрезком  $AB$  длины 6. Отложим на оси  $OT$  также отрезки длины 1, изображающие промежутки наблюдения каждого

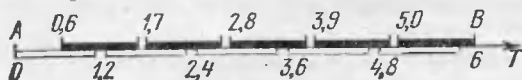


Рис. 7.9.

наблюдателя. Отрезок  $AB$  окажется покрытым отрезками длины 1. Рассуждая как в задачах 7.6 и 7.7, докажем, что можно часть отрезков выбросить так, чтобы оставшиеся покрывали  $AB$  не более чем в два слоя. Занумеруем оставшиеся отрезки слева направо. Тогда отрезки с нечетными номерами не могут иметь общих точек, и, значит, их не более пяти, а всего оставшихся отрезков не более 10. Так как они накрывают весь отрезок  $AB$ , то улитка не могла проползти более 10 м.

Вместе с тем легко придумать такой график наблюдения, при котором улитка проползает ровно 10 м. Пусть, например, график наблюдения таков, как показано на рисунке, и пусть улитка проползает 1 м, когда за ней наблюдает один, и остается на месте, когда наблюдают двое. Очевидно, она за 6 минут проползет 10 м.

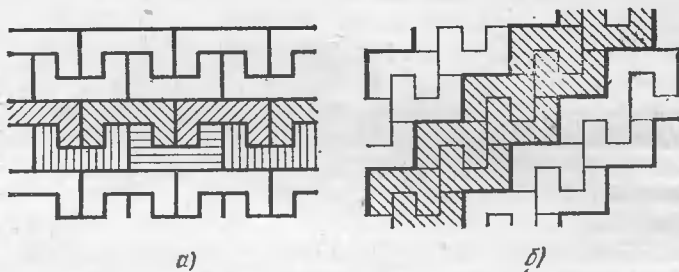


Рис. 8.1.

8.1. Сначала вымостим отдельные полосы, а затем, прикладывая их друг к другу, вымостим всю плоскость (см. рисунок; полосы показаны штриховкой).

8.2. Заметим, что углубление в каждой скобке (1) может быть заполнено двумя другими скобками (2 и 3) лишь двумя способами — один из способов укладки показан на рисунке штриховкой, а второй получается из первого зеркальным отражением.

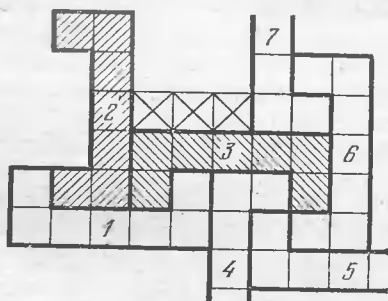
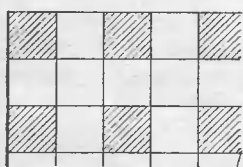


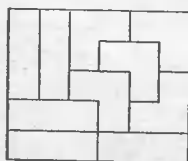
Рис. 8.2.

После того как скобки 1, 2 и 3 выложены, скобки 4, 5, 6 и 7 могут быть уложены лишь единственным способом. Проверьте, что не существует способа укладки последующих скобок, при котором удалось бы накрыть все три клетки, перечеркнутые на рисунке крестом.

8.3. а) Заштрихуем клетки нечетных горизонтальных рядов через одну (см. рисунок а). Заметьте, что



а)



б)

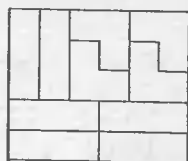


Рис. 8.3.

плитка  $4 \times 1$  покрывает или две заштрихованные клетки, или ни одной, а плитка  $2 \times 2$  покрывает ровно одну заштрихованную клетку. Таким образом, если плитки покрывают дно коробки, то число плиток  $2 \times 2$  и число заштрихованных клеток или оба четные, или оба нечетные. После того как потеряли

одну плитку  $2 \times 2$ , число этих плиток изменило четность.

б) Да, это могло быть (см. рисунок б; на левом рисунке 5 «уголков», а на правом 4).

8.4. Ответ.  $n^2/2$ , если  $n$  четно, и  $(n^2 + n)/2$ , если  $n$  нечетно.

Примеры, когда закрашено именно такое количество клеток, построить легко; нужно закрасить целиком все строки с нечетными номерами: 1-ю, 3-ю и т. д. (проверьте это).

Нужно еще доказать, что большего количества клеток закрасить нельзя. Для четного  $n = 2k$  это ясно, квадрат  $2k \times 2k$  можно разбить на  $k^2$  квадратов  $2 \times 2$ , а в каждом из них должно быть не больше двух закрашенных клеток. Для нечетного  $n = 2k + 1$  можно рассмотреть  $k^2 + k$  квадратов  $2 \times 2$ , заштрихованных на рисунке (где  $k = 7$ ). В каждом из них закрашено не более чем по 2 клетки. Даже если закрасить все  $k$  клеток, лежащих на диагонали и не покрытых заштрихованными квадратами  $2 \times 2$ , то все равно будет закрашено не более  $2(k^2 + k) + k = (n^2 + n)/2$  клеток.

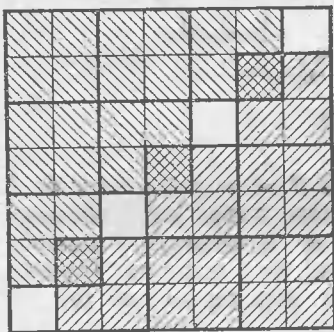


Рис. 8.4.

8.5. Ответ. 20.

Легко провести пример, когда поворотов 20. Докажем, что меньше 20 поворотов быть не может. Рассмотрим 10 улиц какого-то одного направления. Если маршрут проходит по каждой из них, то на каждой из них уже есть не менее двух поворотов маршрута, и все доказано. Если найдется такая улица, по которой маршрут не проходит совсем, то он должен проходить по всем десяти перпендикулярным улицам. К ним мы можем применить то же самое рассуждение.

8.6. Постройте круг радиуса 9, концентрический данной окружности. Рассмотрите все квадратики

$1 \times 1$ , стороны которых параллельны линиям сетки, а центры лежат в ее узлах и внутри окружности радиуса 10. Докажите, что эти квадратики целиком покрывают построенный круг радиуса 9; сравните сумму площадей этих квадратиков с площадью круга.

8.7. Ответ. Наибольшее возможное число клеток — 80.

8.8. Введите систему координат, приняв какие-либо две взаимно перпендикулярные линии клетчатой бумаги за оси координат, а ширину клетки за 1. Пусть  $x_i$  и  $y_i$  — проекции отрезков ломаной линии на оси координат (с учетом знака). Тогда  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ ;  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$ ;  $x_i^2 + y_i^2 = c$ . (Попробуйте ответить на такой вопрос: какие остатки при делении на 4 может давать  $c$  — сумма двух квадратов целых чисел?) Очевидно, можно считать, что хотя бы одно из  $2n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  нечетно — иначе все их можно разделить на подходящую степень числа 2 и свести дело к этому случаю. После этого останется только рассмотреть две возможности: (1) все числа  $x_i, y_i$  нечетны, (2) при каждом  $i$  одно из чисел  $x_i, y_i$  нечетно, другое четно, и показать, что в обоих случаях  $n$  должно быть четным.

8.9. Докажите, что в кратчайшем пути из  $A$  в  $B$  по линиям сетки между двумя соседними отрезками одного какого-либо направления обязательно содержится нечетное число отрезков двух других направлений. Отсюда будет следовать, что если занумеровать по порядку все отрезки, из которых состоит путь шмеля, то или все четные отрезки имеют одно и то же направление, или все нечетные отрезки имеют одно и то же направление.

Разобраться в решении будет намного проще, если вы начертите большую сетку из правильных шестиугольников и попытаете нарисовать кратчайшие пути между несколькими парами узлов, отстоящих на 8—10 шестиугольников.

9.1. Разобьем квадрат прямыми, параллельными сторонам, на 25 квадратов со стороной  $\frac{1}{5}$ . Если бы в каждый квадрат попало не более двух точек, то всего на 25 квадратов попало бы не больше 50 точек. Значит, найдется квадратик, в который попали три точки. Так как диагональ этого квадратика

$\sqrt{2}/5 = \sqrt{4/50}$  меньше, чем  $2/7 = \sqrt{4/49}$ , то этот квадратик можно накрыть кругом диаметра  $2/7$ .

9.2. Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберем треугольник наибольшей площади  $s \leq 1$ . Через каждую его вершину проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Площадь треугольника, образованного этими прямыми, как легко видеть, равна  $4s \leq 4$ .

Докажите, что этот треугольник накрывает все  $n$  точек. При доказательстве можно воспользоваться тем, что все треугольники с заданным на плоскости основанием  $a$ , имеющие площадь  $s$  (или меньшую площадь), заключены в полосе между двумя прямыми, параллельными основанию  $a$  и отстоящими от него на расстоянии  $h = 2s/a$ .

9.3. а) Допустим, что это возможно, и пусть  $A_1, A_2, \dots, A_6$  — такие шесть точек внутри круга радиуса 1, попарные расстояния между которыми больше 1. Проведем из центра круга радиусы через каждую из данных точек. (Ясно, что никакие две точки не лежат на одном радиусе.) По крайней мере 2 из этих 6 радиусов образуют угол, не превосходящий  $60^\circ$ , и расстояния между любыми двумя точками на этих радиусах не больше 1. Противоречие.

б) Допустим, что это возможно. Опишем около каждой точки кружок радиуса  $r = 0,5$ . По условию эти кружки не имеют общих точек и расположены в круге радиуса  $R = 10,5$ , концентрическом исходному кругу радиуса 10. Поэтому сумма их площадей  $450\pi r^2 = 450\pi/4$  не превосходит площади этого круга  $\pi R^2 = (21/2)^2\pi = 441\pi/4$ , откуда  $450 \leq 441$ . Противоречие.

в) Проверьте, что при достаточно малом  $\varepsilon$  (например,  $\varepsilon = 0,02$ ) в круге радиуса 10 поместится более 400 центров сетки правильных шестиугольников со стороной  $\frac{1+\varepsilon}{2}$ , покрывающих плоскость. Расстояние между центрами соседних шестиугольников равно  $1 + \varepsilon$ , т. е. больше 1. Оценить количество центров внутри круга можно тем же приемом, который был использован в задачах 7.4 и 8.6: шестиугольники, центры которых лежат в круге радиуса 10, заведомо покрывают концентрический круг радиуса  $10 - \frac{1+\varepsilon}{2}$ ,

и дело сводится к проверке неравенства

$$400 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot (1,02)^2 < \pi (9,49)^2.$$

**9.4.** Докажите, что геометрическое место  $\Phi(x)$  состоит из следующих кусков, изображенных на рисунке:

а) многоугольника  $M$ , б) прямоугольников высоты  $x$ , прилежащих к каждой стороне  $M$  извне, в) секторов радиуса  $x$ , прилежащих к каждой вершине.

Используя теорему о сумме углов многоугольника, докажите, что площадь фигуры  $\Phi(x)$  равна

$$s(x) = s + Px + \pi x^2. \quad (*)$$

Эта формула справедлива не только для выпуклых многоугольников, но и для любой выпуклой фигуры. Проверьте ее для круга и для сегмента.

Для невыпуклых фигур формула  $(*)$  уже неверна (постройте пример), но для них площадь фигуры  $\Phi(x)$  всегда не превосходит  $s(x)$ .

**9.5.** Центр клумбы может располагаться в любой точке двора, удаленной от забора и от каждого из 5 сооружений не менее чем на 5 м. Такие точки заведомо найдутся, если площадь «внутреннего» квадрата со стороной 60 м, расположенного concentрично забору, окажется (см. рисунок на обложке) больше общей площади  $S$  всех 5 сооружений и окаймляющих их пятиметровых полос. Эта последняя площадь, согласно предыдущей задаче, равна

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_5 + (l_1 + l_2 + \dots + l_5) x + 5\pi x^2,$$

где  $s_i$  — площадь  $i$ -го сооружения,  $l_i$  — его периметр ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), а  $x = 5$  м. Подставляя сюда данные из условия задачи, проверьте, что  $S < 3540 < 60^2 \text{ м}^2$ .

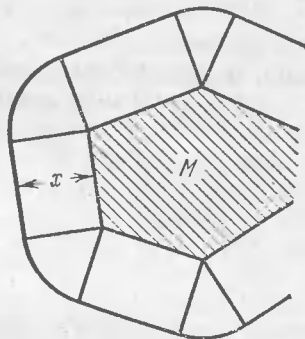


Рис. 9.4.



Заметим, что форма сооружений несущественна для решения. Достаточно было бы знать лишь число сооружений, общую площадь, занимаемую ими, и сумму периметров.

9.6. Десантник заведомо выйдет из леса, если он будет идти по окружности радиуса  $r = \sqrt{S/\pi}$ . Действительно, если бы вся эта окружность помещалась внутри леса, то площадь леса была бы больше  $\pi r^2 = S$ .

Формально задача решена, но мы покажем, как можно было бы естественно прийти к такому решению, и заодно убедимся в том, что оценка  $2\sqrt{\pi S}$  в некотором смысле наилучшая из возможных.

Заметим, что путь должен быть обязательно замкнутым или по крайней мере содержать точки самопересечения. В самом деле, в противном случае, каким бы длинным ни был путь  $L$ , существует лес в виде столь узкой полосы вдоль пути  $L$ , что его площадь не превосходит  $S$  (см. рисунок). Уточняя эти рассуждения, можно показать, что десантник должен идти по неко-

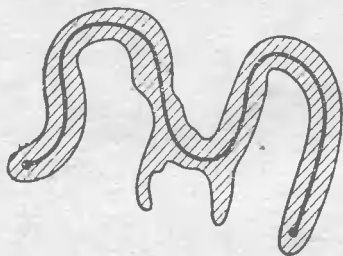


Рис. 9.6.

торому замкнутому маршруту  $L$ . Для того чтобы при любой форме леса можно было гарантировать выход на опушку леса, необходимо и достаточно, чтобы площадь, ограниченная линией  $L$ , была не меньше  $S$ . При этом, если маршрут  $L$  выбран кратчайшим из возможных, то в самых неблагоприятных ситуациях десантнику до выхода на опушку придется пройти весь (или почти весь) маршрут  $L$ . Итак, задача о выборе «хорошей стратегии» сводится к следующему вопросу: среди всех замкнутых кривых, ограничивающих площадь  $s$ , найти кривую наименьшей длины. Ответ, как известно, дает окружность. (Об этом см., например, в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры», Физматгиз, 1962, стр. 169—174.)

9.7. Десантник должен двигаться по полуокружности радиуса  $\sqrt{2s/\pi}$ . Длина этой полуокружности,

гарантирующей выход, равна как раз  $\sqrt{2\pi S}$ . Доказательство того, что этот путь годится, очевидно (ср. с задачей 9.6).

9.8. Заметьте, что равносторонний треугольник «вылезает» из любой полосы, ширина которой меньше высоты треугольника. Поэтому, двигаясь по двум сторонам равностороннего треугольника с высотой  $l$ , разведчик наверняка выйдет из леса, пройдя путь не более  $2 \cdot \frac{2l}{\sqrt{3}} \approx 2,31l$ . Отме-

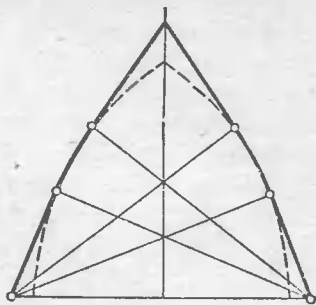


Рис. 9.8.

тим, что и этот способ не наилучший. Окончательный ответ дает довольно хитрая кривая (см. рисунок), составленная из отрезков и дуг окружностей, имеющая длину  $\approx 2,278 l$ . (Подробности см. в статье В. А. Залгаллера «Как выйти из леса?», «Математическое просвещение», вып. 6, 1961.)

9.9. Заметьте, что тропинка, которая начинается у самого высокого дерева, затем идет напрямик к следующему по высоте дереву, затем — к третьему по высоте и т. д. до самого низкого дерева, имеет длину меньше 40 м. Огородив забором (длиной 80 м) эту тропинку, соединяющую все деревья, мы тем самым окружим забором и весь лес.

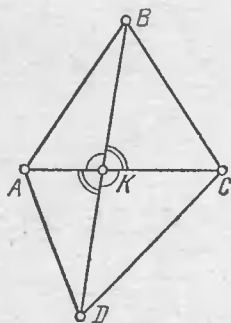


Рис. 10.2.

10.1 Докажите, что сумма противоположных сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$  меньше суммы его диагоналей:  $AB + CD < AC + BD$ . (Мы использовали этот факт при решении задачи 1.7.) Сложив последнее неравенство с данным в условии  $AB + BD < AC + CD$  и упрощая, получим  $AB < AC$ .

10.2. Заметьте, что середина  $K$  отрезка  $BD$  лежит на прямой  $AC$ . Сравните углы  $\angle AKB = \angle CKD$  и  $\angle AKD = \angle CKB$  (см. рисунок),

10.3. Проведем окружность радиуса  $CD = BC$  с центром в точке  $C$ . Она пересечет отрезок  $AC$  в некоторой точке  $E$  (так как  $AC > BC$ ). Вписанный угол  $EBD$  — прямой (он опирается на диаметр), значит, угол  $ABD$  — тупой.

Другое решение можно получить, заметив, что биссектриса  $CK$  угла  $C$  треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $BD$ , а если  $AC > BC$ , то  $\angle AKC > \angle BKC$ .

10.4. а) Пусть  $a, b, c$  — стороны этого треугольника,  $h_a = 3, h_b = 4, h_c = 5$  — опущенные на них высоты,  $s$  — площадь треугольника. Тогда  $ah_a = bh_b = ch_c = 2s$ , откуда  $a = \frac{2s}{h_a}, b = \frac{2s}{h_b}, c = \frac{2s}{h_c}$ , т. е. данный треугольник подобен треугольнику со сторонами  $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ , равными  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ . Так как

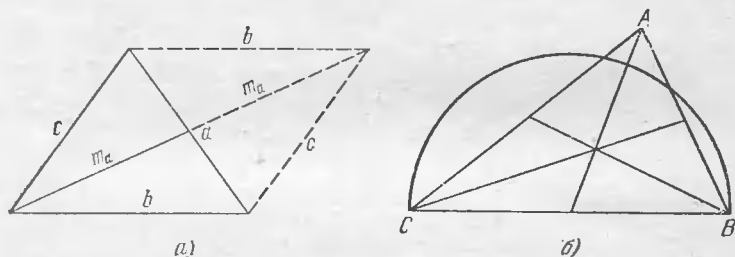


Рис. 10.4.

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$ , то данный треугольник — тупоугольный.

б) Пусть  $m_a = 3, m_b = 4, m_c = 5$  — медианы треугольника, проведенные к сторонам  $a, b, c$ . До-  
страивая треугольник до параллелограмма (рисунок а) и пользуясь тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, получим выражение медиан треугольника через его стороны:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2,$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Решая эту систему относительно  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ , получим

$$a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2), \quad b^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2),$$

$$c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2). \quad \text{Подставляя сюда } m_a = 3,$$

$$m_b = 4, \quad m_c = 5, \quad \text{найдем } a^2 = 292/9, \quad b^2 = 208/9,$$

$$c^2 = 100/9. \quad \text{Так как } a^2 < b^2 + c^2, \text{ то данный треуголь-$$

ник — остроугольный.

Так можно решить задачу в общем случае (при любых  $m_a, m_b, m_c$ ). Для конкретных чисел  $m_a = 3$ ,  $m_b = 4$  и  $m_c = 5$  есть более простое решение: ясно, что  $a < \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 5 = 6$ , следовательно,  $m_a > \frac{a}{2}$ , поэтому вершина  $A$  лежит вне окружности, построенной на стороне  $BC$ , как на диаметре (рисунок б), поэтому угол  $A$  — острый. Так же можно доказать, что углы  $B$  и  $C$  — тоже острые.

**10.5.** Сначала считаем, сколько диагоналей у выпуклого  $n$ -угольника. В каждой из  $n$  вершин сходится  $(n - 3)$  диагонали, но в произведении  $n(n - 3)$  каждая диагональ учитывается дважды, так как соединяет 2 вершины. Значит, у выпуклого  $n$ -угольника  $n(n - 3)/2$  диагоналей, в частности, у 11-угольника  $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$  диагонали.

Проведем через фиксированную точку  $P$  плоскости 44 прямых, параллельных диагоналям данного 11-угольника. Они разделят полный угол в  $360^\circ$  вокруг точки  $P$  на 88 частей, и наименьшая из этих частей не будет превосходить  $\frac{360^\circ}{88}$ , что меньше чем  $5^\circ$ .

**10.6.** Для треугольника утверждение задачи очевидно (неравенство превращается в равенство), поэтому будем считать, что число  $n$  сторон многоугольника не меньше четырех.

Проведем в данном  $n$ -угольнике все  $n$  диагоналей, соединяющих его вершины через одну. Каждая из этих диагоналей вдвое больше параллельного ей отрезка, соединяющего середины сторон данного  $n$ -угольника (рисунок а). Поэтому утверждение задачи эквивалентно тому, что сумма этих  $n$  диагоналей больше периметра  $n$ -угольника. Для доказательства последнего утверждения заметьте, что даже сумма

кусочков этих диагоналей, примыкающих к вершинам многоугольника (на рисунке б они обведены жирными линиями), больше периметра  $n$ -угольника.

**10.7.** Докажем более общее утверждение, а именно, что площадь любого параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника. Продлим противоположные стороны  $MN$  и  $PQ$  параллелограмма  $MNPQ$  до

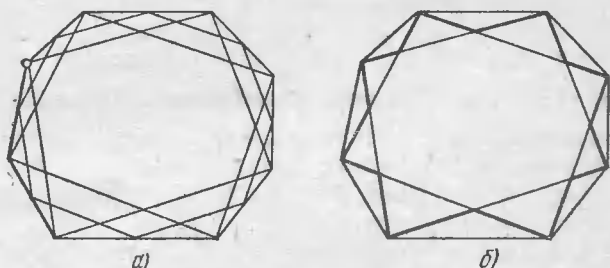


Рис. 10.6.

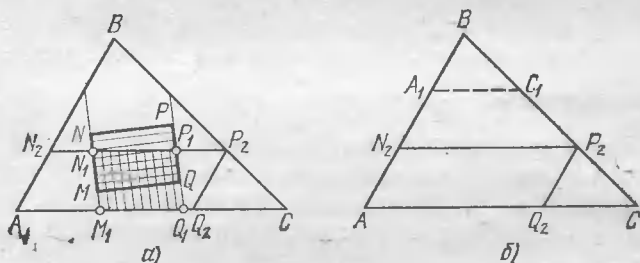


Рис. 10.7.

пересечения со сторонами треугольника  $ABC$  (рисунок а). По крайней мере две из четырех точек пересечения лежат на одной стороне треугольника. Пусть это будут точки  $M_1$  и  $Q_1$  на  $AC$ . Отложим на прямых  $MN$  и  $PQ$  от точек  $M_1$  и  $Q_1$  отрезки  $M_1N_1 = MN$  и  $P_1Q_1 = PQ$ . Параллелограммы  $MNPQ$  и  $M_1N_1P_1Q_1$  имеют равные основания  $MN$  и  $M_1N_1$  и равные высоты, значит, их площади равны. Пусть прямая  $N_1P_1$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $N_2$  и  $P_2$ . Проведем через точку  $P_2$  отрезок  $P_2Q_2 \parallel AB$ . Далее, площадь  $M_1N_1P_1Q_1$  не больше площади  $AN_2P_2Q_2$  (так

как их высоты равны, а основания  $N_1P_1 \leq N_2P_2$ ). Остается доказать, что площадь  $AN_2P_2Q_2$  не больше половины площади  $ABC$ .

Пусть  $CP_2 < BP_2$  (случай  $BP_2 < CP_2$  рассматривается аналогично — нужно только поменять ролями вершины  $B$  и  $C$ ). Отложим на  $BC$  от точки  $C$  отрезок  $CC_1 = 2CP_2$  и проведем  $A_1C_1 \parallel AC$  (рисунок б). Площадь параллелограмма  $AN_2P_2Q_2$  равна половине площади трапеции  $AA_1C_1C$  ( $N_2P_2$  — средняя линия трапеции), а значит, меньше половины площади треугольника  $ABC$ .

**10.8.** Пусть  $ABCDEF$  — произвольный выпуклый шестиугольник (см. рисунок). Проведем в нем диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ . Пусть  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — точки пересечения диагоналей (они могут слиться в одну). Шестиугольник разбился на 3 четырехугольника  $ABMF$ ,  $BCDN$ ,  $DEFP$  и треугольник  $MNP$ . В четырехугольниках проведем диагонали  $AM$ ,  $CN$  и  $EP$ , которые разбивают их на 6 заштрихованных на рисунке треугольников. Основанием каждого треугольника является одна из сторон шестиугольника, а вершина, противолежащая этому основанию, лежит на диагонали, соединяющей две противоположные вершины шестиугольника. Ясно, что площадь хотя бы одного из заштрихованных треугольников не больше  $\frac{1}{6}$  площади шестиугольника. Пусть это будет, скажем, треугольник  $AMF$ , его высота —  $MH$ . Площадь хотя бы одного из треугольников  $ABF$  или  $AEF$  не больше площади треугольника  $AMF$ , так как хотя бы одна из высот  $BH_1$  или  $EH_2$  этих треугольников не больше  $MH$ . Все доказано.

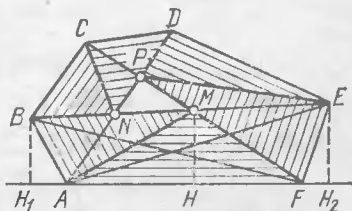


Рис. 10.8.

**10.9.** Пусть  $A_1A_2 \dots A_n$  — данный  $n$ -угольник,  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$ , ...,  $M_nN_n$  — разрезы (см. рисунок). Допустим, что утверждение задачи неверно. Допустим для определенности, что  $\angle A_2M_2N_2 < 90^\circ$ . Построим на  $OA_2$ , как на диаметре, окружность. Так как  $\angle OM_2A_2 = \angle OM_3A_3 = 90^\circ$ , то точки  $M_2$  и  $M_3$  лежат на этой окружности. Так как  $M_2N_2 \geq 1$  и  $OA_2 = 1$ ,

то точка  $N_2$  не может лежать внутри построенной окружности. Пусть  $P$  — точка пересечения разреза  $M_2N_2$  с этой окружностью (возможно,  $P$  совпадает с

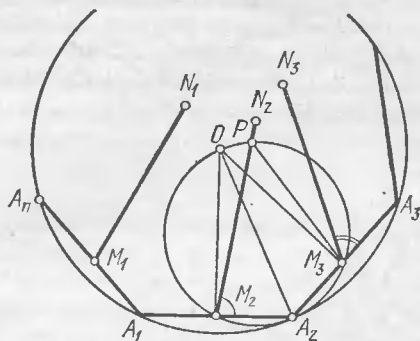


Рис. 10.9.

$N_2$ ). Проверьте, что  $\angle PM_2A_2 = \angle PM_3A_3$ , и, значит,  $\angle A_2M_2N_2 > \angle A_3M_3N_3$ . Так же докажем, что

$\angle A_3M_3N_3 > \angle A_4M_4N_4 > \angle A_5M_5N_5 > \dots$

$\dots > \angle A_nM_nN_n > \angle A_1M_1N_1 > \angle A_2M_2N_2$ .

Отсюда  $\angle A_2M_2N_2 > \angle A_2M_2N_2$ . Противоречие.

11.1. Пусть  $M'$  — точка, которая получается из точки  $M$  при повороте вокруг точки  $A$  на угол, равный данному (см. рисунок). Тогда за точку  $C$  нужно взять точку пересечения отрезка  $MM'$  со стороной данного угла.

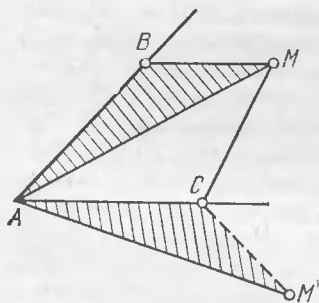


Рис. 11.1.

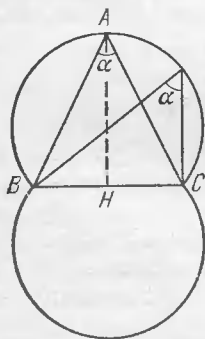
Для доказательства воспользуйтесь тем, что если  $AB = AC$ , то  $MB + MC = M'C + MC$ .

11.2. Отрезки следует расположить так, чтобы их общая точка лежала на биссектрисе угла, а перпенди-

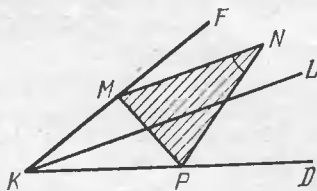
куляры к их серединам проходили через вершину угла.

При решении этой задачи полезно следующее утверждение: *среди всех треугольников с данным осно-*

ванием  $a$  и углом  $\alpha$  при вершине (противолежащей основанию) наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник. Доказать это можно так. Геометрическое место вершин треугольников, имеющих данное основание  $BC = a$  и данный угол при вершине  $\angle BAC = \alpha$ , — это дуги двух сегментов, вмещающих угол  $\alpha$  (рисунок а). Среди таких треугольников равнобедренный имеет наибольшую высоту  $AH$ .



а)



б)

Рис. 11.2.

Площадь четырехугольника  $KMPN$  равна сумме или разности площадей треугольников  $KMP$  и  $MNP$ . Будем двигать  $\triangle MNP$  так, чтобы вершины  $M$  и  $P$  скользили по сторонам угла. Тогда площадь треугольника  $MNP$  не меняется. При этом площадь четырехугольника достигает максимума одновременно с площадью треугольника  $KMP$ , т. е. тогда, когда треугольник  $KMP$  станет равнобедренным:  $KM = KP$ . Точка  $N$  окажется на биссектрисе  $KL$  угла  $K$ . Значит, задача сведена к случаю, когда точка  $N$  лежит на  $KL$ . В этом случае площадь четырехугольника  $KMPN$  равна сумме площадей равных треугольников  $NKP$  и  $MKN$  с основаниями  $NP = MN = 1$ . Эти треугольники имеют наибольшую площадь, когда они равнобедренные  $KM = KN = KP$ .

**11.3.** Наибольшую площадь имеет ромб, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю прямоугольника, а концы другой лежат на сторонах прямоугольника.



Докажем, что всякий другой ромб имеет меньшую площадь. Пусть  $ABCD$  — данный прямоугольник (см. рисунок),  $AD$  и  $BC$  — его большие стороны, и пусть

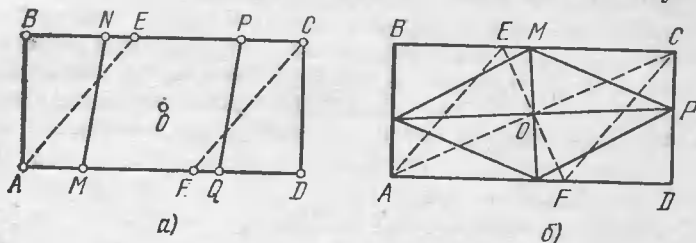


Рис. 11.3.

в прямоугольник помещен некоторый ромб. Через центр прямоугольника проведем прямые, параллельные диагоналям ромба, до пересечения со сторонами прямоугольника в точках  $M, N, P, Q$ . Получим новый ромб  $MNPQ$ , площадь которого не меньше площади исходного ромба (докажите это!) и вершины которого лежат на сторонах  $ABCD$ .

Пусть  $AECF$  — ромб, описанный в ответе. Докажем, что площадь ромба  $MNPQ$  не больше площади ромба  $AECF$ .

Когда все вершины ромба  $MNPQ$  лежат на больших сторонах прямоугольника, это верно, поскольку ромбы имеют одинаковую высоту  $AB$  (рисунок  $a$ ), а сторона  $MN$  меньше  $AE$  (докажите это!). Когда все вершины этого ромба лежат на разных сторонах прямоугольника, это верно потому, что диагонали ромба соответственно меньше диагоналей ромба  $AECF$  (на рисунке  $b$   $MO < EO, PO < CO$ ).

11.4. Ответ. Точка  $M$  — основание высоты  $BM$  треугольника  $ABC$ . Заметьте, что диаметры окружностей, о которых говорится в условии, не могут быть меньше хорд  $AB$  и  $BC$  соответственно.

11.5. Ответ. Эта точка — вершина, противолежащая наибольшей стороне.

Пусть  $x, y$  и  $z$  — расстояния точки  $M$  от прямых  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно;  $h_a, h_b, h_c$  — высоты, опущенные на стороны  $a = BC, b = CA, c = AB$ ;  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ . Очевидно,  $x \leq h_a, y \leq h_b, z \leq h_c$ . Так как площадь треугольника  $ABC$  складывается из площадей треугольников  $BСМ,$

САМ и АВМ, то  $S = (ax + by + cz)/2$ , откуда

$$\frac{ax}{2S} + \frac{by}{2S} + \frac{cz}{2S} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

Пусть  $a > b > c$  и, значит,  $h_a < h_b < h_c$ . Если в левой части последнего равенства заменить  $h_b$  и  $h_c$  на  $h_a$ , то сумма увеличится, и мы получим  $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_a} + \frac{z}{h_a} \geq 1$  или  $x + y + z \geq h_a$ , причем  $x + y + z = h_a$ , только если  $y = z = 0$  и  $x = h_a$ . Отсюда видно, что сумма  $x + y + z$  достигает наименьшего значения, когда точка  $M$  совпадает с вершиной  $A$ .

**11.6.** Ответ. Угол  $ОМА$  максимален, когда угол  $ОАМ$  — прямой.

Пусть  $M$  — произвольная точка окружности и  $ОК$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на прямую  $МА$  (см. рисунок). В треугольнике  $КМО$  гипотенуза  $ОМ$  постоянна (равна радиусу), следовательно, угол  $АМО$  тем больше, чем больше катет  $ОК$ .

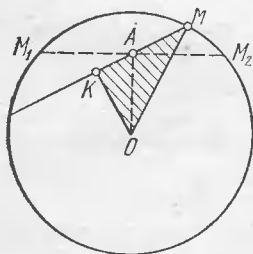


Рис. 11.6.

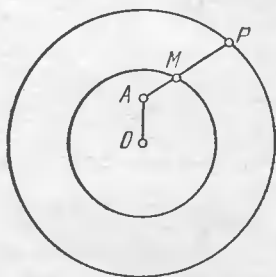


Рис. 11.7.

Докажите, что при движении точки  $M$  по данной окружности точка  $K$  описывает окружность с диаметром  $ОА$  и что отрезок  $ОК$  наибольший, когда точка  $K$  совпадает с  $A$ . Тогда  $M_1$  и  $M_2$  — это точки пересечения данной окружности с прямой, перпендикулярной отрезку  $ОА$  в точке  $A$ .

**11.7.** Ответ. а) лучи, лежащие на прямой  $ОА$ ,  
б) лучи, перпендикулярные  $ОА$ .

Докажите, что отрезок  $MP$ , заключенный между окружностями (см. рисунок), тем больше, чем больше угол  $АМО$ . После этого задача б) сводится к задаче 11.6.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. а) На сколько частей могут делить плоскость четыре различные прямые? (Укажите все значения.)

б) Тот же вопрос для пяти прямых.

2. а) При каких  $n$  и  $k$  на плоскости можно расположить  $n$  отрезков так, чтобы каждый из них пересекался с  $k$  другими?

б) Тот же вопрос для  $n$  окружностей.

3. а) Сколько существует прямых, равноудаленных от трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой?

б) Сколько существует окружностей, равноудаленных от четырех данных точек плоскости, не лежащих на одной окружности (расстоянием от точки  $M$  до окружности называется расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки окружности)? Нужно указать все возможные значения.

4. Плоскость разделена на  $n$  частей ( $n > 3$ ) прямыми, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку.

а) Докажите, что среди этих частей найдется по крайней мере две, имеющие форму треугольника.

б) Докажите, что к каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник.

5. Всякий ли треугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники?

6. а) Докажите, что любой треугольник можно разрезать на треугольники, у каждого из которых один угол равен  $120^\circ$ .

б) Докажите, что ни один треугольник с углами, не превосходящими  $120^\circ$ , нельзя разрезать на треугольники, у каждого из которых один угол больше  $120^\circ$ .

7. Докажите, что выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы в том и только в том случае, когда у него есть центр симметрии; эквивалентное условие — для каждой стороны существует равная и параллельная ей.

8. Докажите, что правильный пятиугольник можно разбить на 4 тупоугольных треугольника \*).

---

\*) В отличие от задачи 7.1, здесь вершины треугольника могут лежать на сторонах многоугольника.

На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разбить правильный  $n$ -угольник?

9. Если  $n$ -угольник, где  $n \geq 4$ , разрезан не пересекающимися внутри  $n$ -угольника диагоналями на треугольники, то среди этих треугольников встречаются такие, которые имеют с многоугольником две общие стороны, одну общую сторону или ни одной — пусть их количества соответственно  $a_2, a_1, a_0$ .

Докажите, что

а)  $a_2 + a_1 + a_0 = n - 2$ ,

б)  $2a_2 + a_1 = n$ .

10. а) Докажите, что как бы ни раскрасить плоскость в три цвета, найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

б) Раскрасьте плоскость в девять цветов так, чтобы любые две точки, находящиеся на расстоянии 1, были окрашены в разные цвета.

в) Придумайте, как можно обойтись семью красками.

11. а) Известен пример несамопересекающегося 10-угольника, все стороны которого лежат на пяти прямых (см. рисунок).

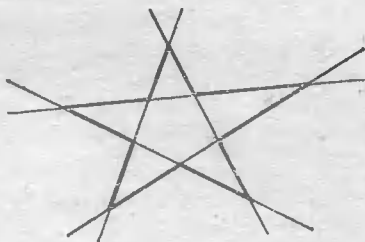


Рис. 11.

Докажите, что замкнутая несамопересекающаяся ломаная, все звенья которой лежат на шести данных прямых (никакие два соседних звена не идут по одной прямой), не может иметь больше 10 звеньев.

б) Постройте пример замкнутой ломаной из 17 звеньев (никакие два несоседних звена не имеют общих точек), которые лежат на семи прямых.

в) Можно ли число 17 заменить большим?

12. Для каждого нечетного  $n \geq 5$  постройте пример самопересекающейся  $n$ -звенной ломаной, которая каждое свое звено пересекает 2 раза.

13. Найдите все треугольники с целочисленными длинами сторон, периметр которых равен удвоенной площади.

14. а) Какую наибольшую площадь может иметь многоугольник периметра  $4p$ , стороны которого лежат на линиях клетчатой бумаги (сторона клетки равна 1;  $p$  — целое число)?

б) Какую наименьшую площадь может иметь такой многоугольник (его контур не должен проходить ни через одну вершину дважды)?

15. а) Какие прямоугольники  $m \times n$  на клетчатой бумаге можно покрыть фигурками из трех клеток, имеющими форму буквы Г?

б) Тот же вопрос для фигурок из 4 клеток в форме буквы Г.

16. На клетчатой бумаге лежит многоугольник площади меньше 1. Докажите, что его можно сдвинуть так, чтобы он не закрывал ни одного узла сетки (сторона клетки равна 1).

17. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги (сторона клетки равна 1)?

18. Какое наибольшее число клеток может разрезать (на две части) отрезок длины 15, лежащий на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1)?

19. В треугольнике высота, опущенная на сторону  $a$ , не меньше  $a$ , а высота, опущенная на сторону  $b$ , не меньше  $b$ . Найдите углы треугольника.

20. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра и больше половины периметра этого треугольника.

21. а)  $M$  — точка, лежащая на биссектрисе  $AK$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что разность расстояний от точки  $M$  до точек  $B$  и  $C$  не больше, чем разность сторон  $AB$  и  $AC$  (по модулю).

б) Если  $AK$  и  $BL$  — биссектрисы треугольника  $ABC$  и  $AC > BC$ , то  $AL > LK > KB$ . Докажите это.

22. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  дана точка  $P$ . Где на основании  $BC$  нужно выбрать точку  $Q$ , чтобы площадь четырехугольника, образующегося в пересечении треугольников  $BPC$  и  $AQD$ , была наибольшей?

23. Назовем «коэффициентом неравнобедренности»  $y(T)$  треугольника  $T$  со сторонами  $a \leq b \leq c$  наименьшее из чисел  $b/a$  и  $c/b$ .

Существует ли треугольник  $T$ , у которого коэффициент  $y(T)$  равен 2? 1,5? Какие вообще значения может принимать  $y(T)$ ?

24. Один выпуклый четырехугольник помещается внутри другого.

а) Может ли сумма его диагоналей быть больше, чем сумма диагоналей объемлющего?

б) Могут ли обе его диагонали быть больше наибольшей диагонали объемлющего?

в) Может ли сумма его диагоналей быть вдвое больше, чем сумма диагоналей объемлющего четырехугольника?

25. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади  $S$  и периметра  $P$  можно поместить в прямоугольник, у которого площадь не больше  $2S$  и периметр не больше  $2P$ .

26. Дан отрезок  $AB$  и на нем точки  $H$  и  $K$ . Постройте треугольник  $ABC$ , у которого  $CH$  — высота, а  $CK$  — биссектриса. При каком расположении точек  $H$  и  $K$  такое построение возможно?

27. На доске была начерчена трапеция, в ней проведена средняя линия  $EF$  и опущен перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся точкам  $E$ ,  $F$ ,  $O$ ,  $K$ ?

28. Постройте треугольник, зная положение одной из его вершин, середины противоположной стороны и точки пересечения высот.

29. В данную окружность впишите трапецию так, чтобы ее диагонали пересекались в заданной точке  $P$ , а средняя линия проходила через заданную точку  $Q$ .

30. На плоскости заданы три точки:  $O$ ,  $P$  и  $Q$ . Постройте равносторонний треугольник, у которого центр лежит в точке  $O$ , а две из его сторон (или их продолжения) проходят: одна — через точку  $P$ , другая — через точку  $Q$ .

31. На плоскости заданы четыре точки  $K$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Постройте равнобедренный треугольник, у которого середина основания  $K$ , а три стороны (или их продолжения) проходят соответственно через точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$ .

32. а) Задана точка  $O$  и прямая, не проходящая через эту точку. Постройте прямоугольный треугольник, у которого высота, проведенная к гипотенузе, лежит на данной прямой, а центр описанной окружности лежит в данной точке  $O$ .

б) Та же задача, но в точке  $O$  должен лежать центр вписанной окружности искомого треугольника.

33. Постройте треугольник, зная центры вписанной, описанной и одной из вневписанных (см. сноску на стр. 12) окружностей.

34. Постройте четыре вершины квадрата с заданной стороной  $a$  с помощью одного циркуля.

35. Пусть  $K$  и  $L$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $Q$  — точка пересечения диагоналей,  $P$  — точка пересечения продолжений сторон  $BC$  и  $AD$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что если какие-то три из четырех точек  $K$ ,  $L$ ,  $Q$  и  $P$  лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на той же прямой (а четырехугольник  $ABCD$  — трапеция).

36. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC = a$  и  $AD = b$ . Можно ли выбрать на ее боковых сторонах такие точки  $M$  (на  $AB$ ) и  $N$  (на  $CD$ ), чтобы выполнялись условия:  $MN \parallel BC \parallel AD$ ,  $MC \parallel AN$ ? Будет ли при этом  $BN \parallel MD$ ?

37. На плоскости проведены четыре попарно пересекающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Известно, что прямая  $a$  параллельна одной из медиан треугольника, образованного тремя другими прямыми:  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Докажите, что тогда и каждая из прямых  $b$ ,  $c$  и  $d$  обладает тем же свойством.

38. В равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан равнобедренный треугольник  $KMN$  ( $MK = KN$ ) так, что вершина  $K$  лежит в середине основания  $AC$ , а вершины  $M$  и  $N$  — соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  на разных расстояниях от вершины  $B$ . Докажите, что угол при основании  $ABC$  вдвое меньше угла при вершине  $K$  треугольника  $MKN$ .

39. В прямоугольник  $ABCD$  вписан равносторонний треугольник  $APK$  так, что вершина  $K$  находится на стороне  $BC$ , а вершина  $P$  — на стороне  $CD$ . Пусть  $KH$  — высота треугольника  $APK$ . Докажите, что треугольник  $BHC$  — равносторонний.

40. Из основания высоты  $CH$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведены биссектрисы:  $HE$  — треугольника  $CHA$  и  $HF$  — треугольника  $CHB$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $E$ ,  $F$  и  $H$  лежат на одной окружности, причем вторая точка  $K$  пересечения этой окружности с гипотенузой  $AB$  — основание биссектрисы  $CK$  треугольника  $ABC$ .

41. Докажите, что если в треугольнике периметра  $2p$  с радиусами вписанной и описанной окружности  $R$  и  $r$

$$2R + r = p,$$

то он прямоугольный. Для каких треугольников  $2R + r > p$ ?  $2R + r < p$ ?

42. а) Докажите, что в любом треугольнике  $ABC$  середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и середины отрезков  $АН$ ,  $СН$ , где  $Н$  — точка пересечения высот, являются вершинами прямоугольника.

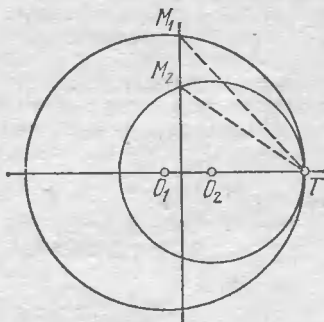


Рис. 43.

б) Докажите, что в треугольнике  $ABC$  середины сторон, основания высот и середины отрезков  $АН$ ,  $ВН$  и  $СН$  лежат на одной окружности («окружность девяти точек»).

43. Одна окружность касается внутренним образом другой. Проведем произвольную секущую, перпендикулярную их линии центров  $O_1O_2$  (см. рисунок). Докажите, что отношение расстояний от точки касания  $T$  до точек  $M_1$  и  $M_2$  пересечения секущей с окружностями постоянно.

44. Прямая, переходящая через точку  $P$  пересечения продолжений боковых сторон  $AB$  и  $CD$  описанной трапеции  $ABCD$  и точку  $M$ , в которой вписанная окружность касается основания  $BC$ , пересекает основание  $AD$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $AQ = ND$ , где  $N$  — точка, в которой вписанная окружность касается основания  $AD$ .

45. а) Как известно, в выпуклый четырехугольник  $ABCD$  можно вписать окружность в том и только в том случае, если  $AB + CD = BC + AD$ . Какому условию должны удовлетворять длины сторон выпуклого четырехугольника, чтобы существовала окружность, касающаяся всех четырех прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  и лежащая вне четырехугольника?

б) Как должны быть расположены на плоскости четыре различные прямые, чтобы существовали две различные окружности, каждая из которых касается всех четырех прямых (опишите все случаи)? Может ли случиться, что существует более двух таких окружностей?

46. Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются данной прямой в точках  $A$  и  $B$  и пересекаются в точке  $C$  (это одна из двух точек пересечения окружностей, безразлично какая).  $O_3$  — центр окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Докажите, что отрезок  $O_3C$

а) составляет равные углы с отрезками  $O_1C$  и  $O_2C$ ,

б) равен по длине  $\sqrt{O_1C \cdot O_2C}$ .

47. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Пусть  $P$  — точка пересечения луча, делящего пополам угол между лучами  $OB$  и  $OC$ , с описанной около  $ABC$  окружностью. Докажите, что  $OP = \sqrt{OB \cdot OC}$ .

48. Две прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются в точке  $P$ . Через эту точку проводятся две окружности, которые пересекаются второй раз в точке  $Q$  (отличной от  $P$ ) и пересекают данные прямые  $l_1$  и  $l_2$ : первая — в точках  $M_1$  и  $M_2$ , вторая — в точках  $N_1$  и  $N_2$

соответственно (все эти точки отличны от  $P$ ). Докажите, что  $M_1N_1 = M_2N_2$  тогда и только тогда, когда точка  $Q$  одинаково удалена от данных прямых, т. е. когда  $Q$  лежит на биссектрисе одного из углов между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ .

49. Дана окружность. Из концов ее диаметра  $AB$  проведены две хорды  $AC$  и  $BD$ , пересекающиеся в точке  $E$ . Докажите, что окружность, проходящая через точки  $C$ ,  $E$  и  $D$ , пересекает данную окружность под прямым углом (т. е. касательные к этим окружностям в точке их пересечения перпендикулярны).

50. Две хорды  $BE$  и  $CF$  одной окружности пересекаются в точке  $A$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $BC$ . Докажите, что прямая  $KA$  пересекает отрезок  $EF$  в такой точке  $M$ , что  $EM : MF = = (AC)^2 : (AB)^2$ .

51. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  берется точка  $P$ , а на стороне  $BC$  — точка  $Q$ . На отрезках  $AQ$  и  $CP$ , как на диаметрах, строятся окружности. Докажите, что их общая хорда проходит через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .

52. Построим для произвольного треугольника  $ABC$  центры, вписанной и невписанных (см. сноску на стр. 12) окружностей. Докажите, что из четырех построенных центров каждый является точкой пересечения высот в треугольнике, образуемом тремя другими центрами.

53. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, точка  $P$  не лежит на этой прямой. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABP$ ,  $ACP$  и  $BPC$ , лежат на окружности, проходящей через точки  $P$ . Верна ли обратная теорема?



Николай  
Борисович  
Васильев

Станислав  
Алексеевич  
Молчанов

Александр  
Львович  
Розенталь

Анатолий  
Павлович  
Савин

Математические соревнования  
М., 1974 г., 80 стр. с илл.

---

Редактор	Г. Я. Пирогова
Техн. редактор	Н. В. Кошелева
Корректор	Л. С. Сомова

---

Сдано в набор	24/XII 1973 г.
Подп. к печати	5/VI 1974 г.
Бумага	84×108/ <sub>32</sub> , тип. № 3.
Физ. печ. л.	2,5.
Усл. печ. л.	4,2.
Уч.-изд. л.	3,69.
T-11219.	
Тираж	350 000 экз.
Цена книги	10 коп.
Заказ 8	

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071 Москва, В-71,  
Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете  
Совета Министров СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли  
198052, Ленинград, Л-52,  
Измайловский пр., 29